Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 160

In vier Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Haar.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 160.

Seite

Baer, Reinhold, Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren, geschlossenen Fläche vom Geschlechte 2 1

Baer, Reinhold, Zur Einführung des Scharbegriffs 199

Baer, Reinhold, Zur Topologie der Gruppen 208

Brauer, Alfred, Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen . . 70

Burstin, C. und **Mayer, W.,** Distributive Gruppen von endlicher Ordnung . . . 111

Hensel, Kurt, Über Systeme in einfachen Körpern 131

Herzberger, M., Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie 33

Lipka, Stephan, Eine Verallgemeinerung des *Rouché*schen Satzes 143

v. Neumann, J., Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre 227

Pallas, Werner, Über eine Fläche, auf der die Asymptotenlinien ein Gewebe bilden 151

Plessner, A., Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen 26

Prasad, Ganesh, On the differentiability of the integral function 100

Svenson, Erik, Zur Theorie der Summengleichungen 38

Tietze, Heinrich, Bemerkungen über konvexe und nicht-konvexe Figuren 67

Tornier, Erhard, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie 177

Weatherburn, C. E., On oblique Trajectories of a Family of Curves on a Surface . 61

Inhaltsverzeichnis der Bände 141—160 242

Ausgabedaten der Hefte von Band 160.

Heft 1 ausgegeben am 8. Februar 1929
Heft 2 ausgegeben am 12. März 1929
Heft 3 ausgegeben am 30. Mai 1929
Heft 4 ausgegeben am 20. August 1929

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 160

Heft 1

Ausgegeben den 8. Februar 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 160. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Baer, Reinhold, Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren, geschlossenen Fläche vom Geschlechte 2	1
Plessner, A., Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen	26
Herzberger, M., Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie	33
Svenson, Erik, Zur Theorie der Summengleichungen	38
Weatherburn, C. E., On oblique Trajectories of a Family of Curves on a Surface	61

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Verlages R. Oldenbourg in München bei.

Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren, geschlossenen Fläche vom Geschlechte 2[1]).

Von *Reinhold Baer* in Halle a. S.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Die Gruppe $\mathfrak{L}$ der torsionslosen Abbildungstypen	2
§ 2. Die Transformationsformeln für die *Dehn*schen Zahlen bei Operationen aus $\mathfrak{L}$	5
§ 3. Die Abbildungstypengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$	21
1. Die Torsionen	21
2. Vollständigkeit des Erzeugendensystems	21
3. Die Gruppe der Torsionen	24

Einleitung.

Sei $\mathfrak{F}$ die orientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht 2; wir wollen ihre Abbildungstypengruppe $\mathfrak{A}$ untersuchen [2]).

Verstehen wir unter einem Gerüst G von $\mathfrak{F}$ ein System von sechs einfachen Kurven auf $\mathfrak{F}$, das $\mathfrak{F}$ in vier einfach zusammenhängende Sechsecke zerlegt und der Darstellung durch *Dehn*sche Normalformen [3]) zu Grunde gelegt werden kann, so zeigt sich, daß eine Abbildung von $\mathfrak{F}$, die alle Kurven von G in homotope überführt, zum gleichen Typus mit einer Abbildung gehört, die G als ganzes in sich überführt; die Gruppe dieser [torsionslosen] Abbildungstypen ist endlich und läßt sich vollständig aufstellen (§ 1).

Wir werden also Einblick in die Struktur von $\mathfrak{A}$ zu gewinnen hoffen können, wenn wir das Verhalten der Klassen [Typen] isotoper [homotoper] Kurven bei Abbildungen von $\mathfrak{F}$ auf sich untersuchen.

Die Klassen isotoper Kurven auf $\mathfrak{F}$ werden durch die *Dehn*schen Normalformen und diese durch die *Dehn*schen Zahlen vollständig charakterisiert [4]); wir werden nun zunächst untersuchen, wie sich die *Dehn*schen Zahlen bei der Ausübung von gewissen einfachen und naheliegenden Operationen aus $\mathfrak{A}$ transformieren (§ 2). Mit Hilfe dieser Transformationsformeln beweisen wir (§ 3), daß die obigen einfachen Operationen ein vollständiges Erzeugendensystem für $\mathfrak{A}$ darstellen [5]).

---

[1]) cf. die beiden vorhergehenden Arbeiten des Verfassers: *Kurventypen auf Flächen* und *Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen,* (ds. Journ. 156 (1927), p. 231—246 und 159 (1928), p. 101—116), im folgenden zitiert mit: Teil I und Teil II.

[2]) $\mathfrak{A} = A/D$, wenn A die Gruppe aller topologischen Abbildungen, D die der Deformationen von $\mathfrak{F}$, also eine invariante Untergruppe von A ist; cf. Teil II, § 3, p. 116.

[3]) cf. Teil I, § 2, ferner *M. Dehn*: Autographierter Vortrag im math. Colloquium, Breslau, 11. 2. 1922.

[4]) cf. Teil I, § 2, insbesondere Satz 5 und 5a; Teil II, § 2, Satz 1, Satz 1a und Zusätze dazu.

[5]) Wir geben hierbei im wesentlichen ausführlicher dargestellt und begründet die Untersuchungen von *Dehn* l. c. wieder. Doch hat *Dehn* die Transformationsformeln nur soweit entwickelt, als es für den Vollständigkeitsbeweis notwendig war.

Die Grundlage dieser Untersuchung bildet die Darstellung der *Dehn*schen Normalformen, welche wir an anderer Stelle gegeben haben [1]), und von der wir auch die Bezeichnungen übernehmen. Hierbei ist die in der Figur 1 angegebene Einteilung von $\mathfrak{F}$ zu Grunde gelegt; in der Figur ist die Orientierung der SKi und der $PUKi$ angegeben, welche die Drehringe der UKi beranden.

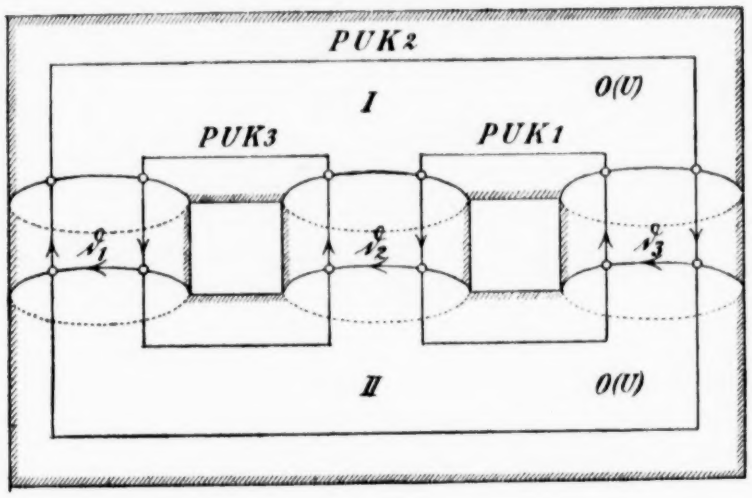

Fig. 1.

§ 1. Die Gruppe $\mathfrak{L}$ der torsionslosen Abbildungstypen.

Unter dem *Gerüst* G von $\mathfrak{F}$ sei das System der SKi und UKi ($i = 1, 2, 3$) verstanden; hierbei ist die Numerierung so vorgenommen, daß SKi und UKi keinen Punkt gemein haben.

Eine Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf sich heiße *torsionslos*, wenn bei ihr das Gerüst G von $\mathfrak{F}$ als ganzes in ein System zu G homotoper, also nach Satz 1 des Teils II, § 2 isotoper Kurven übergeht; mit einer Abbildung sind notwendig alle zum gleichen Typus gehörigen Abbildungen von $\mathfrak{F}$ auf sich torsionslos; wir sind also von *torsionslosen Abbildungstypen* zu reden berechtigt.

Die Gesamtheit der torsionslosen Abbildungstypen bildet eine allerdings nicht invariante Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}$. Es gilt der

Satz 1: *Dann und nur dann gehört ein Abbildungstypus A von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{L}$, ist torsionslos, wenn es eine zum Typus A gehörige topologische Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf sich gibt, bei der das Gerüst G als ganzes in sich übergeht* [2]).

Durch eine topologische Abbildung T von $\mathfrak{F}$ auf sich sei das Gerüst G in ein System von Kurven u_i, s_i ($i = 1, 2, 3$) derart übergegangen, daß jeweils u_i isotop UKi, s_i isotop SKi ist, d. h. T ist torsionslos. Wir haben eine topologische Deformation D von $\mathfrak{F}$ anzugeben, durch die u_i in UKi, s_i in SKi übergeführt wird.

Zunächst folgt aus Satz 1 a von Teil II, § 2 die Existenz einer Deformation D_1, bei der u_i je in UKi übergeht; die Bildkurven der s_i wollen wir s_{i1} nennen.

Im folgenden betrachten wir die universelle Überlagerungsfläche $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$, die auf den als hyperbolische Ebene aufgefaßten Einheitskreis abgebildet sei, und in $\mathfrak{U}$ [3]) das Netz der $f(UKi)$, $f(SKi)$, die als Geraden in $\mathfrak{U}$ angenommen werden können, und der $f(s_{i1})$. Jedes $f(s_{i1})$ hat mit genau einem $f(SKi)$ die Endpunkte gemein und umgekehrt;

---

[1]) cf. Teil I, § 2.

[2]) Der Satz gilt, wie sein Beweis zeigt, auch für orientierbare, geschlossene Flächen vom Geschlecht > 2, wenn man nur unter G das System der UK, SK, ZK versteht (cf. Teil I, p. 242 unten!); er stellt m. E. eine Verschärfung von Satz 3 des Teils II, § 3, p. 114 dar.

[3]) Für diese und die folgenden Begriffe und Bezeichnungen cf. Teil I, p. 232, Teil II, p. 101/102.

weiter hat ein $f(s_{i1})$ bzw. $f(SKi)$ mit einem $f(UKk)$ höchstens einen [und wenn überhaupt, dann einen inneren] Punkt gemein. Durchlaufen wir schließlich ein $f(UKk)$ von einem Endpunkt zum anderen, so treffen wir auf die Schnittpunkte mit den $f(SKi)$ in der gleichen Reihenfolge wie auf die mit den $f(s_{i1})$ [und zwar immer abwechselnd auf einen Schnittpunkt mit $f(SK(k-1))$ bzw. $f(s_{k-1\,1})$ und einen mit $f(SK(k+1))$ bzw. $f(s_{k+1\,1})$, wobei die Indizes mod 3 zu reduzieren sind]. Bedenken wir schließlich, daß die $f(UKi)$, die $f(SKi)$ und die $f(s_{i1})$ je untereinander keinen Punkt gemein haben, so folgt die Existenz einer Deformation D_2 von $\mathfrak{F}$, die eine solche Deformation von $\mathfrak{U}$ induziert, daß die $f(UKi)$ je in sich übergehen, die Bilder s_{i2} der s_{i1} aber derart beschaffen sind, daß $f(s_{i2})$ mit dem gleichen $f(SKi)$ die Endpunkte gemein hat wie das $f(s_{i1})$, aus dem es hervorgeht, und daß die $f(s_{i2})$ mit den $f(UKk)$ die gleichen Schnittpunkte haben wie die $f(SKi)$, mit denen sie in den Endpunkten übereinstimmen. [Hierzu werden die $f(UKk)$ auf beiden Ufern so ε-gezwirnt, wo $\varepsilon > 0$ kleiner als ein Viertel des Abstands zweier $f(UKi)$ voneinander zu wählen ist, daß die $f(UKk)$ so in sich deformiert werden, daß die Schnittpunkte mit den $f(s_{i1})$ in die gewünschte Lage übergehen; cf. Teil II, § 3, p. 113!].

Wir betrachten jetzt einen Bogen B eines $f(s_{i2})$, der einen Schnittpunkt mit einem $f(UK(i-1))$ mit einem [beim Durchlaufen von $f(s_{i2})$ in irgendeiner Richtung] nächsten Schnittpunkt mit einem $f(UK(i+1))$ verbindet; B liegt dann über einem Bogen von s_{i2} auf $\mathfrak{F}$, der ganz auf O oder ganz auf U gelegen ist. Durch eine beliebig kleine Deformation D_3 von $\mathfrak{F}$ läßt sich erreichen, daß B in einen [endlichen] Polygonzug B' übergeht, während gleichzeitig die $f(UKi)$ fest bleiben (cf. Hilfssatz (2), (3) des Teils II, § 1!). D_3 kann ohne weiteres so eingerichtet werden, daß B' mit den $f(SKk)$ keine ganzen Kanten, also nur endlich viele Punkte gemein hat. Analog wie beim Beweis der Hilfssätze (4) und (3) beim Beweis des Satzes 1 des § 2 des Teil II, p. 107—109 gelingt es unter mehrfacher Anwendung des *Tietze*schen Lemmas [1]) durch eine Deformation von $\mathfrak{F}$ den Bogen B' in den entsprechenden Bogen von $f(SKk)$ überzuführen, wobei die schon in die richtige Lage gebrachten Bogen von $f(UKk)$ bzw. $f(s_{i2})$, $[f(SKi)]$ in Ruhe bleiben können, da sich ja diese Deformationen ganz in O bzw. ganz in U durchführen lassen.

Damit haben wir aber eine Deformation D_4 von $\mathfrak{F}$ gefunden, durch die s_{i2} je in SKi übergeführt wird, während die UKk je in Ruhe bleiben; durch die Deformation $D = \prod_{j=1}^{4} D_j$ von $\mathfrak{F}$ werden also die s_i, u_i in G übergeführt, womit unser Satz bewiesen ist.

Das Gerüst G zerlegt $\mathfrak{F}$ in vier Sechsecke: IO, IU, IIO, IIU. Ein Element aus $\mathfrak{L}$ bewirkt dann, daß ein jedes dieser vier Sechsecke in ein anderes — ev. auch dasselbe — übergeht, jedoch derart, daß zwei Sechsecke vor und nach Ausübung einer Operation aus $\mathfrak{L}$ durch die gleichen Kanten zusammenhängen. — Anschaulich ist dieser Prozeß als eine Neueinheftung der vier Sechsecke in das Gerüst G zu deuten, wobei längs der Kanten zusammengeheftet werden soll, welche vorher aufgeschnitten worden sind.

Satz 2a: *$\mathfrak{L}$ ist endlich und von der Ordnung 48.*

Beweis: 1. Haben wir ein Sechseck in G in bestimmter Weise eingeheftet, so ist dadurch auch die Lage der beiden Sechsecke eindeutig bestimmt, die mit dem ersten je drei Kanten gemein haben. Damit ist aber auch die Lage des vierten Sechsecks eindeutig bestimmt, d. h. die Lage eines Sechsecks bestimmt die aller vier Sechsecke.

2. Wir haben also noch die Frage zu beantworten, auf wieviel verschiedene Weisen sich ein Sechseck in G einheften läßt. Einmal kann man ein Sechseck in die Lage eines jeden Sechsecks bringen; das sind vier Möglichkeiten. Weiter muß hierbei die Reihenfolge der Ecken entweder erhalten bleiben oder umgekehrt werden; das sind zwei Mög-

[1]) *v. Kerékjartó*: Topologie I, Berlin (1923), p. 186.

lichkeiten. Schließlich kann die Reihenfolge der Ecken noch zyklisch permutiert werden; das sind weitere 6 Möglichkeiten. Damit haben wir $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ Möglichkeiten.

Dies sind aber auch alle Möglichkeiten, da die Lage eines Sechsecks in G eindeutig festliegt, wenn man den „Platz" und die Eckenzuordnung angegeben hat, q. e. d.

Die Erzeugenden von $\mathfrak{L}$:

$$a\colon \{IO;\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\} \to \{IIO;\ 4\,5\,6\,1\,2\,3\}\ ^{1}).$$

Dies ist eine sogenannte Vertauschung von Innen- und Außenraum; d. h. jede im Inneren von $\mathfrak{F}$ — wenn man sich $\mathfrak{F}$ etwa im Euklidischen Raum gelegen denkt — berandende Kurve geht in eine im Außenraum von $\mathfrak{F}$ berandende Kurve über.

$$b\colon \{IO;\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\} \to \{IIO;\ 3\,4\,5\,6\,1\,2\}.$$

Dies ist eine Spiegelung an der „Ebene" der Schnittkreise, verbunden mit einer zyklischen Permutation der $\mathfrak{d}_i$.

$$c\colon \{IO;\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\} \to \{IO;\ 6\,5\,4\,3\,2\,1\}.$$

Dies ist eine Spiegelung an einer zu den Ebenen der UK und SK senkrechten Ebene.

Relationentafel:

$$(P)\ a^4 = 1,\ b^6 = 1,\ c^2 = 1.$$

$$(V)\ ba = a^3 b = a^{-1} b,\ ca = ac,\ bc = cb^5 = cb^{-1}.$$

Satz 2b: *Die durch die Erzeugenden a, b, c und die Relationen (P), (V) definierte Gruppe $\mathfrak{L}'$ ist mit $\mathfrak{L}$ identisch.*

Beweis: Da a, b, c Elemente aus $\mathfrak{L}$ sind und (P), (V) in $\mathfrak{L}$ wahr sind, so genügt es wegen Satz 2a nachzuweisen, daß $\mathfrak{L}'$ die Ordnung 48 hat.

Hierzu bringen wir die „Worte" aus $\mathfrak{L}'$ auf eine Normalform, indem wir erst vermittels (V) die „Buchstaben" c vor a und b und dann die a vor die b bringen. Reduzieren wir dann die Exponenten von a, b, c durch (P) auf ihre kleinsten, nicht negativen Werte, so haben wir jedes Wort aus $\mathfrak{L}'$ auf die Normalform

$$(N)\ c^{\gamma} a^{\alpha} b^{\beta}$$

mit $0 \leqq \alpha < 4,\ 0 \leqq \beta < 6,\ 0 \leqq \gamma < 2$ gebracht. Diese repräsentieren aber genau 48 verschiedene Elemente von $\mathfrak{L}'$, q. e. d.

Das Gruppenbild[2]) von $\mathfrak{L}$:

In diesem ist wegen $c = c^{-1}$ die Erzeugende c als Doppelpfeil darzustellen.

Ordnen wir dann auf einem Würfel die Erzeugenden a, b, c so an, wie es die Figur 2 zeigt, so entspricht jeder Relation aus (V) ein geschlossener Streckenzug des Würfels. Stellen wir uns dann diesen Würfel in sechs Exemplaren $W^{(i)}$ mit den Ecken: $1^{(i)}, \ldots, 8^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ her und setzen wir die Würfel $W^{(i)}$ und $W^{(i+1)}$ — $W^{(6)}$ und $W^{(1)}$ — zusammen, indem wir die Ecken $1^{(i)}, 2^{(i)}, 5^{(i)}, 6^{(i)}$ mit bzw. $4^{(i+1)}, 3^{(i+1)}, 8^{(i+1)}, 7^{(i+1)}$ und die gleiche Ecken verbindenden Kanten identifizieren, so entsteht ein torusartiges Gebilde T. In T gehört jede Kante b genau einem nur von b's gebildeten Sechseck an, entsprechend der Relation $b^6 = 1$. Die Zahl der Punkte von T ist 24.

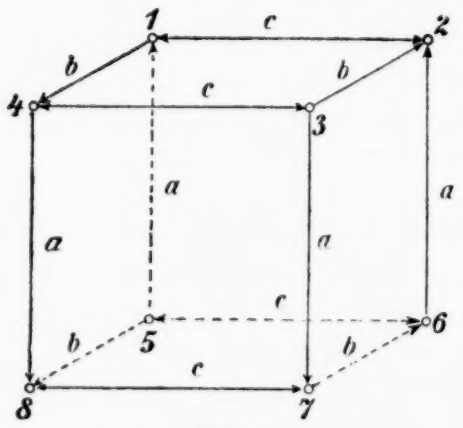

Fig. 2.

[1]) 1, 2, ..., 6 bezeichne die Schnittpunkte der SKi mit den UKk; vgl. Fig. 1, wo man sich die Numerierung dieser Schnittpunkte von links nach rechts verlaufend zu denken hat.

[2]) Vgl. *M. Dehn*: Math. Ann. Bd. 69 (1910), S. 140 ff.

Nennen wir die aus 1, 2, 3, 4 entstandenen Ecken von T die der Oberseite, die übrigen die der Unterseite; stellen wir uns T in vier Exemplaren $T^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ her und identifizieren wir je die Ecken der Oberseite von $T^{(i)}$ und die sie verbindenden Kanten mit den Ecken der Unterseite von $T^{(i+1)}$ und den sie verbindenden Kanten — $T^{(4)}$ mit $T^{(1)}$ — so daß von jedem Punkt eine Kante a abgeht, eine Kante a an jedem Punkt ankommt, und so daß nur gleichbenannte und gleichgerichtete Kanten identifiziert werden, so entsteht ein Gebilde $\mathfrak{g}$, das der Torusschale ähnlich gebaut ist, 48 Eckpunkte enthält und jeder Relation (P), (V) und nur diesen geschlossene Streckenzüge entsprechen läßt.

Also ist $\mathfrak{g}$ *das Gruppenbild von* $\mathfrak{L}$.

§ 2. Die Transformationsformeln für die *Dehn*schen Zahlen bei Operationen aus $\mathfrak{L}$.

Unter einem *Zweige* sei ein ganz in einem $\mathfrak{d}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gelegenes Kurvenstück verstanden, das zwei Randpunkte dieses $\mathfrak{d}_i$ miteinander verbindet; ein Zweig heißt *unecht* oder *echt*, je nachdem die beiden Randpunkte auf der gleichen oder auf verschiedenen Randkurven des $\mathfrak{d}_i$ gelegen sind. Läßt man von einer *TLi* die im Innern des $\mathfrak{d}_i$ gelegenen Kurvenstücke fort, so erhält man ein Paar von *TLH*; jedes der beiden Kurvenstücke eines solchen Paares heiße eine *TLH* und je zwei *TLH*, die man sich auf diese Weise entstanden denken kann, heißen ein *Paar von TLH*.

Unter einer *Verbindung* eines $\mathfrak{d}_k$ mit einem $\mathfrak{d}_l$ $(k \neq l)$ ist ein Kurvenstück zu verstehen, das einen Randpunkt des $\mathfrak{d}_k$ mit einem Randpunkt des $\mathfrak{d}_l$ verbindet, ohne weiter mit einem $\mathfrak{d}$ Punkte gemein zu haben.

Unter einer *Dehn*schen Normalform ist ein System von endlich vielen, einfachen, stetigen und geschlossenen Kurven zu verstehen, die untereinander keinen Punkt gemein haben und den folgenden Postulaten genügen:

1. es gibt in keinem $\mathfrak{d}_i$ unechte Zweige;
2. von *TLH* abgesehen, gibt es außerhalb der $\mathfrak{d}$ nur Verbindungen verschiedener $\mathfrak{d}$;
3. die Verbindungen zweier verschiedener $\mathfrak{d}$ liegen vollständig auf O; — hieraus folgt, daß derartige Verbindungen entweder vollständig auf *IO* oder vollständig auf *IIO* liegen;
4. zwischen den Verbindungen des $\mathfrak{d}_i$ mit dem $\mathfrak{d}_k$ auf *IO* und denen auf *IIO* besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung;
5. die *TLH* lassen sich zu Paaren zusammenfassen [1]).

Üben wir auf $\mathfrak{F}$ eine Operation aus $\mathfrak{L}$ aus, so geht eine *Dehn*sche Normalform in ein Kurvensystem über, das sich auf eine und nur eine Weise durch eine Deformation von $\mathfrak{F}$ in *Dehn*sche Normalform bringen läßt [2]) — es kann sich ohne weiteres in *Dehn*scher Normalform befinden, jedoch wird dies im allgemeinen nicht der Fall sein. Hierbei gehen also die *Dehn*schen Zahlen m_i, v_i in Zahlen m_i', v_i' über, die nur von m_i, v_i und der auf $\mathfrak{F}$ ausgeübten Operation aus $\mathfrak{L}$ abhängen. Unser Ziel in diesem § 2 ist es, die *Transformationsformeln* der *Dehn*schen Zahlen für alle Operationen aus $\mathfrak{L}$ aufzustellen. Wegen Satz 2b (§ 1, p. 4) genügt es hierzu offenbar, diese Transformationsformeln für die Erzeugenden a, b, c von $\mathfrak{L}$ aufzustellen.

---

[1]) Wie leicht zu sehen ist, stimmt diese Definition mit der Konstruktion des Teiles I, § 2 überein.

[2]) cf. Teil I, § 2, Nr. 1 und 2 und Satz 5, p. 246 des Teils I, sowie den Satz 5a und den Zusatz zu Satz 2 des Teils II, p. 114, aus denen folgt, daß durch eine Deformation von $\mathfrak{F}$ nicht zwei verschiedene *Dehn*sche Normalformen ineinander übergeführt werden können.

Bei Ausübung von c geht $\mathfrak{d}_1$ in $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_3$ in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ in sich über. Also ist:

$$m_3' = m_1, \quad m_2' = m_2, \quad m_1' = m_3.$$

Da aber c mit einer Spiegelung verbunden ist, so gilt:

$$\nu_3' = -\nu_1, \quad \nu_2' = -\nu_2, \quad \nu_1' = -\nu_3,$$

außer wenn $m_i = 0$ ist. Dann gilt:

$$\nu_3' = \nu_1 \text{ für } i = 1, \quad \nu_2' = \nu_2 \text{ für } i = 2, \quad \nu_1' = \nu_3 \text{ für } i = 3.$$

Bei Ausübung von b geht $\mathfrak{d}_i$ in $\mathfrak{d}_{i+1}$ über, wo der Index mod 3 auf die kleinste positive Zahl zu reduzieren ist. Da auch b mit einer Spiegelung verbunden ist, so ist für $i = 1, 2, 3$:

$$m_{i+1}' = m_i, \quad \nu_{i+1}' = -\nu_i, \text{ außer wenn } m_i = 0 \text{ ist; dann gilt } \nu_{i+1}' = \nu_i.$$

Bei Ausübung von a geht UKi in SKi und SKi in UKi über; allerdings wird hierbei der Durchlaufungssinn umgekehrt, was wir etwa durch: $UKi \to -SKi$ und $SKi \to UKi$ für $i = 1, 2, 3$ ausdrücken können. Ebenso gilt: $PUKi \to -PSKi$, $PSKi \to PUKi$. Eine TLi geht also in sich über, da ihre Schnittreihe [1]) mit G, von der Orientierung abgesehen, UKi, SKi, UKi, SKi ist.

Hieraus folgt, daß bei einer Ausübung von a auf $\mathfrak{F}$ die Urform[2]) einer *Dehn*schen Normalform wieder in eine *Dehn*sche Urform übergeht. Hieraus folgt dann der

Satz 3: *Sei $\mathfrak{C}$ eine Dehnsche Normalform auf $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ ihre Urform; üben wir auf $\mathfrak{F}$ die Operation a aus, so geht $\mathfrak{C}$ in ein Kurvensystem $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ in eine Urform $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ über. Verdrehen wir dann $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ um ν_i längs UKi im Drehring des UKi [3]), in den ja $\mathfrak{d}_i$ bei Ausübung von a übergeht, so ergibt sich ebenfalls das Kurvensystem $\mathfrak{C}'$.*

Dieses Bildsystem $\mathfrak{C}'$ ist nicht notwendig eine *Dehn*sche Normalform; bevor wir also an die Ausrechnung der *Dehn*schen Zahlen m_i', ν_i' von $\mathfrak{C}'$ gehen, müssen wir $\mathfrak{C}'$ erst auf Normalform bringen, was, wie oben gesagt, nur auf eine Weise möglich ist.

Enthält $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ u. a. PSK, $U'(\mathfrak{C})$ also PUK, so gibt ν nur ihre Anzahl an, bedeutet also keine Verdrehung.

Einen Ringbereich kreuzen, heißt: mit seinen beiden Randkurven je einen irreduziblen Schnittpunkt [4]) gemein haben.

Liegen in einem $\mathfrak{d}_i$ u. a. PSK, so kann unser System keine $\mathfrak{d}_i$ kreuzenden Kurven enthalten, da es sonst nicht schnittpunktfrei wäre. Wir haben also nur noch die beiden Fälle zu betrachten, daß $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$

1. $PSKi$, die also im $\mathfrak{d}_i$ liegen, oder
2. TLi, die also im $\mathfrak{d}_i^*$ liegen und $\mathfrak{d}_i$ kreuzen, enthält.

Offenbar kann der Fall 2 nur für ein i eintreten, für welches dann der Fall 1 nicht eintreten kann. Verdrehen wir jetzt, wie vorgeschrieben, $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ längs der UKi um ν_i, so besteht dies in einer Ersetzung der im Drehring des UKi gelegenen Kurvenstücke von $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ durch neue *Verbindungsstücke* $\mathfrak{v}$, die also ganz im Drehring des UKi und damit ganz auf O gelegen sind. — Die bei dieser Verdrehung in Ruhe gelassenen Teile des Kurvensystems, d. s. die nicht im Drehring des UKi gelegenen Teile, liegen dann entweder ganz auf O —

dann nennen wir solch' ein zusammenhängendes Stück ein Oberstück $\mathfrak{o}$ —

oder es liegt ganz auf U, in welchem Falle

---

[1]) cf. Teil I, § 1, p. 236.

[2]) im Sinne von Teil I, p. 243.

[3]) d. h. wir verbinden im Drehring des UKi den Punkt $\varkappa$ auf UKi mit dem Punkt $\varkappa - \nu_i$ auf $PUKi$ oder den Punkt $\varkappa$ auf $PUKi$ mit dem Punkt $\varkappa + \nu_i$ auf UKi.

[4]) cf. Teil I, § 1, p. 235.

wir es ein Unterstück u *nennen.*

Ein $\mathfrak{v}$ verbindet also stets ein $\mathfrak{o}$ mit einem u. Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 4: *Es gibt im* $\mathfrak{d}_i$ *genau* μ_i *Oberstücke* $\mathfrak{o}$ *und* μ_i *Unterstücke* u; *ebenso gibt es im* $\mathfrak{d}_i^*$ *genau* μ_i^* *Oberstücke* $\mathfrak{o}$ *und* μ_i^* *Unterstücke* u [1]); *zu jedem* $\mathfrak{o}$ *und zu jedem* u *gehören genau zwei* $\mathfrak{v}$; *jedes* $\mathfrak{v}$ *verbindet ein* $\mathfrak{o}$ *mit einem* u.

Wir bezeichnen die $\mathfrak{o}$ und u als *zueinander gehörig*, die vor der Verdrehung miteinander verbunden waren.

Ein $\mathfrak{v}$ kann entweder vollständig in einem $\mathfrak{d}_i$ bezw. $\mathfrak{d}_i^*$ gelegen sein oder nicht; im zweiten Fall verläßt dies $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ bezw. $\mathfrak{d}_i^*$ über eine seiner Randkurven und *verbindet ihn mit dem Ausland.* Hiernach können wir die $\mathfrak{o}$ und u in drei Klassen einteilen:

Ein aus einem PSK [TL] entstandenes $\mathfrak{o}$ *oder* u *gehöre zur Klasse A [A*], wenn die beiden an ihm hängenden* $\mathfrak{v}$ *ganz im* $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_i^*]$ *gelegen sind; es gehöre zur Klasse B [B*], wenn nur eines der anhängenden* $\mathfrak{v}$ *ganz im* $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_i^*]$ *verläuft, das andere ihn verläßt; es gehöre zur Klasse C [C*], wenn beide anhängende* $\mathfrak{v}$ *den* $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_i^*]$ *verlassen.*

Schließlich teilen wir noch die $\mathfrak{d}_i$ in zwei Klassen:

$$\begin{aligned} \text{es ist ein} \quad \mathfrak{d}_i &= \mathfrak{d}(\alpha), \quad \text{wenn} \quad \nu_k \cdot \nu_l \geqq 0, \\ &= \mathfrak{d}(\beta), \quad \text{wenn} \quad \nu_k \cdot \nu_l < 0. \end{aligned}$$

In einem $\mathfrak{d}(\beta)$ verlassen die an $\mathfrak{o}$ hängenden $\mathfrak{v}$, sofern sie dies überhaupt tun, den $\mathfrak{d}_i$ sämtlich über die gleiche Randkurve, die an u hängenden $\mathfrak{v}$ sämtlich über die andere Randkurve; in einem $\mathfrak{d}(\alpha)$ dagegen verlassen die beiden an einem $\mathfrak{o}$ der Klasse C hängenden $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ über verschiedene Randkurven.

Diese Unterscheidung ist im $\mathfrak{d}_i^*$ sinnlos, wo die Verhältnisse etwa so wie in einem $\mathfrak{d}_i$ liegen, wo $\nu_k = \nu_l$ ist (vgl. den Beweis des Satzes 9!).

Fall 1. *Für kein i enthalte* $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ *irgendwelche TLi*; dann ist $\mu_i = {}^1/_2\,(m_k + m_l - m_i)$.

Sei $\nu^{kl} = Max\,(|\nu_k|, |\nu_l|)$ und $\nu_{kl} = Min\,(|\nu_k|, |\nu_l|)$.

Unter einem *freien Zweig* sei ein Zweig im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_i^*]$ verstanden, der kein $\mathfrak{o}$ oder u enthält.

Schließlich ist unter der *k-[l-]Seite* des $\mathfrak{d}_i$ der Teil des $\mathfrak{d}_i$ zu verstehen, den er mit dem Drehring des *UKk [UKl]* gemein hat.

Ein $\mathfrak{o}$[u] *trennt* zwei andere $\mathfrak{o}$[u] bezw. ein $\mathfrak{o}$[u] von einer Grenzkurve des $\mathfrak{d}_i(\mathfrak{d}_i^*)$, in dem es gelegen, wenn dies von den Kurven des $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ gilt, aus denen sie entstanden. Unter einem *extremen* $\mathfrak{o}$[u] ist dann ein solches zu verstehen, das von einer der Randkurven des $\mathfrak{d}_i(\mathfrak{d}_i^*)$ durch kein $\mathfrak{o}$[u] mehr getrennt wird.

11. *Sei* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann ist $|\nu_k| + |\nu_l| = \nu^{kl} + \nu_{kl} = |\nu_k + \nu_l|$. Wir untersuchen, wie die $\mathfrak{o}$[u] des $\mathfrak{d}_i$ sich auf die drei Klassen A, B, C verteilen.

11,1. Seien die beiden extremen $\mathfrak{o}$[u] durch je ein an ihnen hängendes $\mathfrak{v}$, das den $\mathfrak{d}_i$ nicht verläßt, mit einem u[$\mathfrak{o}$] des $\mathfrak{d}_i$ verbunden. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn

$$\nu^{kl} < \mu_i.$$

11,11. Diese u[$\mathfrak{o}$] können sich dann gegenseitig von den $\mathfrak{o}$[u] trennen, mit denen sie verbunden sind, und von denen wir eben ausgingen, oder

11,12. sie tun dies nicht.

In diesem Falle können diese u[$\mathfrak{o}$] zusammenfallen, oder zwischen ihnen liegen noch weitere u[$\mathfrak{o}$]; alle und nur diese u[$\mathfrak{o}$] gehören offenbar zur Klasse A. Der Fall tritt ein, wenn

---

[1]) Die Zahlen μ_i, μ_i^* sind hierdurch definiert.

$$|\nu_k| + |\nu_l| < \mu_i;$$

die Zahl der u[o] der Klasse A ist dann also je

$$\mu_i - |\nu_k + \nu_l|.$$

Die übrigen o[u] des $\mathfrak{d}_i$ gehören offenbar der Klasse B an; sie werden durch die o[u] der Klasse A in zwei Klassen zerteilt, so daß die Individuen einer Klasse über die gleiche Randkurve des $\mathfrak{d}_i$ mit dem Ausland verbunden sind. Jede dieser Klassen enthält je $|\nu_k| + |\nu_l|$ Individuen (o und u zusammen).

Freie Zweige kann es natürlich nicht geben.

ad 11,11: In diesem Falle gehören alle die o[u] zur Klasse C, die die beiden o[u] trennen, welche mit den extremen u[o] verbunden sind. Dies tritt ein, wenn $|\nu_k| + |\nu_l| \geqq \mu_i$ ist; die Zahl der o[u] der Klasse C ist $|\nu_k + \nu_l| - \mu_i$.

Die übrigen o[u] gehören offenbar der Klasse B an, welche — wie ad 11,12 — durch die o[u] der Klasse C in zwei Unterklassen zerlegt wird, so daß zu jeder Randkurve des $\mathfrak{d}_i$ eine gehört und jede Unterklasse $2\mu_i - |\nu_k + \nu_l|$ Individuen (o und u zusammen) enthält.

11,2. Gehöre das eine extreme o[u] der Klasse C, das andere der Klasse B an; dies tritt ein, wenn $\nu^{kl} \geqq \mu_i > \nu_{kl}$ ist.

Das eine extreme o[u] des $\mathfrak{d}_i$ ist also mit einem u[o] des $\mathfrak{d}_i$ verbunden, ohne daß das verbindende $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ verläßt. Alle die u[o] gehören zur Klasse B, welche dies ausgezeichnete u[o] von der Randkurve trennen, über die es nicht mit dem Ausland verbunden ist; die übrigen u[o] gehören zur Klasse C.

Die o der Klasse B und die u der Klasse B sind dann — die o über die eine, die u über die andere Randkurve — mit dem Ausland verbunden; zu jeder Randkurve gehören dann $\mu_i - \nu_{kl}$ Indviduen. Zur Klasse C gehören je ν_{kl} o und u. Im $\mathfrak{d}_i$ gibt es schließlich $\nu^{kl} - \mu_i$ freie Zweige, und zwar finden sie auf der Seite des $\mathfrak{d}_i$ ihren Durchlaß, auf der das ν^{kl} angreift.

11,3. Gehören beide extreme o[u] der Klasse C an, so muß $\nu^{kl} \geqq \nu_{kl} \geqq \mu_i$ sein. Dann gibt es offenbar keine o[u] der Klassen A und B und μ_i der Klasse C.

Die Zahl der freien Zweige ist

$$\nu^{kl} - \mu_i + \nu_{kl} - \mu_i = |\nu_k + \nu_l| - 2\mu_i;$$

sie finden auf beiden Seiten des $\mathfrak{d}_i$ Durchlaß, und zwar auf der einen Seite $\nu^{kl} - \mu_i$, auf der anderen $\nu_{kl} - \mu_i$.

Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 5: *Es gehören im* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\alpha)$ *an* o[u]:

$$a_i = Max\,(\mu_i - |\nu_k + \nu_l|, 0) \text{ zur Klasse } A,$$

$$b_i = Min\,\{Max\,(\mu_i, \nu^{kl}) + Max\,(\mu_i, \nu_{kl}) - |\nu_k + \nu_l|,\ |\nu_k + \nu_l|\}$$

zu jeder Unterklasse der Klasse B (o *und* u *zusammen*),

$$c_i = Min\,\{\mu_i,\ Max\,(|\nu_k + \nu_l| - \mu_i, 0)\} \text{ zur Klasse } C.$$

Schließlich gibt es

$$f_i = Max\,(\nu_{kl}, \mu_i) + Max\,(\nu^{kl}, \mu_i) - 2\mu_i$$

freie Zweige im $\mathfrak{d}_i$, *und zwar auf der einen Seite* $Max\,(\nu^{kl}, \mu_i) - \mu_i$, *auf der anderen* $Max\,(\nu_{kl}, \mu_i) - \mu_i$.

12. *Sei* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$, *also* $\nu^{kl} - \nu_{kl} = |\nu_k + \nu_l|$.

Unter einem *freien* $\mathfrak{v}$ sei ein $\mathfrak{v}$ verstanden, das den $\mathfrak{d}_i$ verläßt, d. h. nicht ganz im $\mathfrak{d}_i$ verläuft.

12,1. Es gebe ein extremes o[u], dessen beide $\mathfrak{v}$ nicht frei sind; dies tritt ein, wenn

$\nu^{kl} < \mu_i$ ist. Dann ist dies extreme o[u] mit zwei u[o] verbunden, die ev. auch zusammenfallen können, von denen das eine das andere von den extremen o[u] trennt, von denen wir ausgingen. Alle u[o], die diese beiden u[o] voneinander trennen, das „trennende" eingerechnet, gehören zur Klasse B; die u[o] gehören zur Klasse C, welche das „trennende" u[o] von den extremen o[u] trennen, von dem wir ausgingen; der Rest gehört zur Klasse A. Über die eine Randkurve des $\mathfrak{d}_i$ sind, wie gesagt, die o mit dem Ausland verbunden, über die andere die u; wir sagen, diese o[u] *gehören zu der Randkurve*, so daß zu einer Randkurve nur o, zur andern nur u gehören.

An o bezw. u der Klasse C gehören zu einer Randkurve ν_{kl}; von o bezw. u der Klasse B gehören zu einer Randkurve $\nu^{kl} - \nu_{kl} = |\nu_k + \nu_l|$; und schließlich ist $\mu_i - \nu^{kl}$ die Zahl der o[u] der Klasse A.

12,2. Es habe zwar jedes extreme o[u] wenigstens ein freies $\mathfrak{v}$, aber es gebe doch wenigstens ein extremes o und ein extremes u, die dann notwendig nicht zueinander gehören, deren eines $\mathfrak{v}$ nicht frei ist.

Dieser Fall tritt ein, wenn

$$\nu_{kl} < \mu_i \leqq \nu^{kl} \text{ ist.}$$

Durch das nicht-freie $\mathfrak{v}$ ist das extreme o[u] dann mit einem u[o] verbunden, so daß dieses u[o] zur Klasse B gehört, die u[o] aber zur Klasse C gehören, die dieses u[o] von dem Ausgangs-o[-u] trennen. Alle übrigen o[u] gehören zur Klasse B. Es gibt dann keine o[u] der Klasse A; zur Klasse B gehören $\mu_i - \nu_{kl}$, zur C-Klasse ν_{kl}.

Schließlich gibt es noch $\nu^{kl} - \mu_i$ freie Zweige, die auf der Seite des $\mathfrak{d}_i$ liegen, wo ν^{kl} angreift.

12,3. Die beiden $\mathfrak{v}$ aller extremen o[u] seien frei; dies tritt ein, wenn $\mu_i \leqq \nu_{kl} \leqq \nu^{kl}$ ist.

Dann gehören alle o[u] zur Klasse C.

Weiter gibt es auf der einen Seite des $\mathfrak{d}_i$ $\nu^{kl} - \mu_i$ freie Zweige, auf der anderen Seite $\nu_{kl} - \mu_i$. Im $\mathfrak{d}_i$ gibt es also im ganzen $\nu^{kl} + \nu_{kl} - 2\mu_i$ freie Zweige.

Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 6: *Im* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ *gehören von* o[u]:

$$a_i = Max\,(\mu_i - \nu^{kl}, 0) \quad zur\ Klasse\ A,$$

$$b_i = Min\,(\mu_i, \nu^{kl}) - Min\,(\mu_i, \nu_{kl}) \quad zur\ Klasse\ B,$$

$$c_i = Min\,(\mu_i, \nu_{kl}) \quad zur\ Klasse\ C,$$

und zwar gehören die o *der Klassen* B, C *sämtlich zu der einen, die* u *zu der anderen Randkurve des* $\mathfrak{d}_i$.

Schließlich gibt es noch

$$f_i = Max\,(\nu^{kl} - \mu_i, 0) + Max\,(\nu_{kl} - \mu_i, 0)$$

freie Zweige im $\mathfrak{d}_i$.

Normieroperationen:

Wie gesagt, müssen wir das Bildsystem $\mathfrak{C}'$ erst wieder auf *Dehn*sche Normalform bringen, wenn es sich nicht schon von selbst in dieser befindet. Dies ist aber offenbar nicht der Fall, da z. B. in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ jedes o[u] der Klasse C einen Verstoß gegen Postulat 1 (cf. p. 5!) darstellt. Um alle etwaigen Verstöße gegen die Postulate 1 — 5 zu beseitigen, führen wir einige Operationen ein, die topologische Deformationen von $\mathfrak{C}'$ darstellen und sich durch topologische Deformationen von $\mathfrak{F}$ bewirken lassen.

Die N_1.

Ein o eines $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ gehöre der Klasse C an; dann verlassen die beiden an o hängenden $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ über die gleiche Randkurve und verbinden den $\mathfrak{d}_i$ mit dem $\mathfrak{d}_k$ und

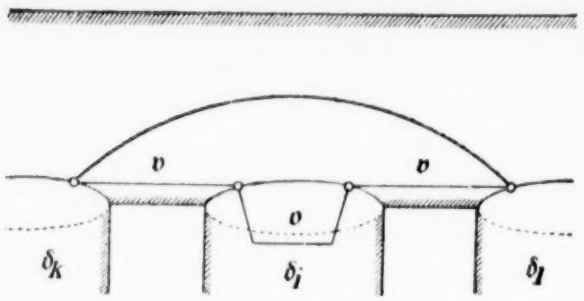

Fig. 3.

dem $\mathfrak{d}_l$. Wir verbinden die Punkte, in denen diese beiden $\mathfrak{v}$ zum ersten Mal in den $\mathfrak{d}_k$ bezw. $\mathfrak{d}_l$ eintreten, durch eine einfache, stetige Kurve miteinander, die mit keinem UK und keinem $\mathfrak{d}$ Punkte gemein hat. Die N_1 ist dann die topologische Deformation, die den Kurvenzug $\mathfrak{v}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}$ in den neuen Kurvenzug überführt.

Die N_1 ersetzt also ein $\mathfrak{o}$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_i$ durch eine Verbindung des $\mathfrak{d}_k$ mit dem $\mathfrak{d}_l$, vermindert also die Zahl der unechten Zweige im $\mathfrak{d}_i$ um eins, während sie sonst alles ungeändert läßt.

Die N_2.

Es gebe im $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C; dann verlassen die beiden an dem $\mathfrak{u}$ hängenden $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ über die gleiche Randkurve; überdies möge das eine $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ mit dem $\mathfrak{d}_l$, das andere den $\mathfrak{d}_i$ mit dem $\mathfrak{d}_k$ verbinden. Seien a, b die Endpunkte des $\mathfrak{u}$, also Ansatzpunkte der beiden $\mathfrak{v}$ im $\mathfrak{d}_i$.

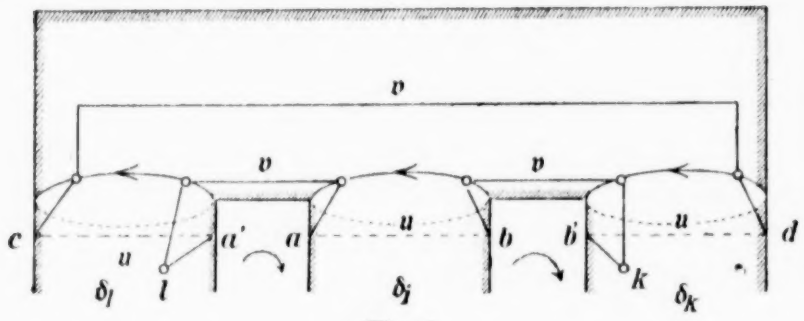

Fig. 4.

Wir wählen jetzt im $\mathfrak{d}_l$ einen Punkt a' auf dem UKk, einen Punkt c auf dem UKi und im $\mathfrak{d}_k$ einen Punkt b' auf UKl, einen Punkt d auf UKi. Schließlich sei $l[k]$ ein Punkt im $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$ auf demjenigen unserer beiden $\mathfrak{v}$, welches den $\mathfrak{d}_i$ mit dem $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$ verbindet.

Wir zeichnen einen Kurvenzug $l\,a'\,\mathfrak{u}\,c\,\mathfrak{v}\,d\,\mathfrak{u}\,b'k$, wie in der Figur 4 angegeben. Die Deformation, die unseren Kurvenzug $l\,\mathfrak{v}\,a\,\mathfrak{u}\,b\,\mathfrak{v}\,k$ in den eben gezeichneten Kurvenzug überführt, ist die N_2. Sie vermindert die Zahl der $\mathfrak{u}$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_i$ um eins, läßt die Zahl der Schnittpunkte mit Randkurven des $\mathfrak{d}_l$ und des $\mathfrak{d}_k$ ungeändert; dagegen bewirkt sie eine Vermehrung der Zahl der $\mathfrak{u}$ im $\mathfrak{d}_l$ und im $\mathfrak{d}_k$ um je eins und eine Veränderung der Windungszahl [1]) im $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$ um $Sign\ v_k[v_l]$, da ja bei Ausübung der Operation a aus $\mathfrak{L}$ UKi in SKi, SKi in $-UKi$ übergeht [2]).

Die N_3.

Sei im $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C gegeben, dessen beide $\mathfrak{v}$ also den $\mathfrak{d}_i$ über die gleiche Grenzkurve verlassen; es mögen aber beide $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}_i$ mit dem gleichen $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\alpha)$ $(k \neq i)$ verbinden [3]).

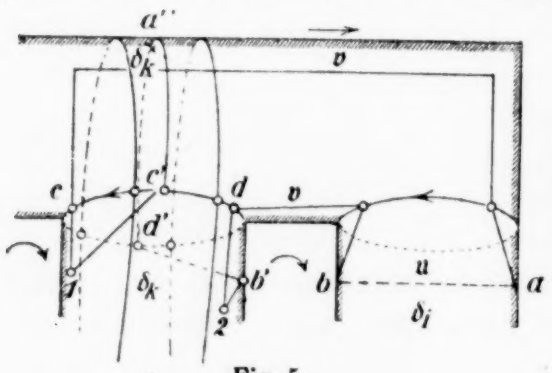

Fig. 5.

Unser $\mathfrak{u}$ habe mit UKk den Punkt a, mit UKl den Punkt b gemein. Die beiden am $\mathfrak{u}$ hängenden $\mathfrak{v}$ treten in den $\mathfrak{d}_k$ notwendig über die gleiche Grenzkurve ein; sei c der Schnittpunkt des an a hängenden $\mathfrak{v}$ mit dieser Grenzkurve, d der des an b hängenden $\mathfrak{v}$.

Der $\mathfrak{d}_k^*$ wird durch den $\mathfrak{d}_k$ in zwei Teile geteilt; wir betrachten den Teil, der mit der Randkurve von $\mathfrak{d}_k$ Punkte gemein hat, auf der c und

[1]) cf. p. 14, wo die genaue Definition steht.

[2]) cf. Anm. [3]), p. 6.

[3]) Dieser Fall kann eintreten, wenn im $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\beta)$ die N_1 ausgeübt worden ist, woraus auch folgt, daß $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\alpha)$ ist.

d liegen. In ihm nehmen wir auf UKk einen Punkt a' an; weiter sei b' ein im $\mathfrak{d}_k$ auf UKl gelegenen Punkt; c' und d' seien Punkte, die sowohl im ausgezeichneten Teil des $\mathfrak{d}_k^*$, als auch auf einer Randkurve von $\mathfrak{d}_k$ gelegen sind; überdies möge c' auf O, dagegen d' auf U gelegen sein. Schließlich seien 1, 2 in $\mathfrak{d}_k$ auf unseren $\mathfrak{v}$ gelegene Punkte und zwar liege 1[2] auf dem $\mathfrak{v}$, das in $a[b]$ beginnt.

Dann zeichnen wir einen Kurvenzug $1\,c'\,a'\,d'\,b'\,2$, so daß $c'\,a'\,d'$ eine *TLH* ist. Unter der N_3 ist dann die Deformation zu verstehen, die den Kurvenzug $1\,c\,\mathfrak{v}\,a\,\mathfrak{u}\,b\,\mathfrak{v}\,d\,2$ in den neuen Kurvenzug überführt.

Die N_3 vermindert die Zahl der $\mathfrak{u}$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_i$ um eins; dagegen läßt sie die Zahl der Schnittpunkte mit den Randkurven des $\mathfrak{d}_k$ (und $\mathfrak{d}_l$) ungeändert.

Erzeugt eine N_3 auf der andern der beiden durch $\mathfrak{d}_k$ bestimmten Seiten des $\mathfrak{d}_k^*$ noch eine *TLH*, so wird ein solches Paar von *TLH* die Windungszahl [1]) im $\mathfrak{d}_k$ um $Sign\,(v_i) = Sign\,(v_l)$ [2]) verändern.

Vollständigkeit des Operationensystems:

Wir haben jetzt zu zeigen, daß man mit Hilfe dieser drei N-Operationen $\mathfrak{C}'$ wieder auf Normalform bringen kann.

Satz 7: *Alle in einem $\mathfrak{d}(\alpha)$ gelegenen Zweige von $\mathfrak{C}'$ sind echt; ein in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ gelegener Zweig ist dann und nur dann unecht, wenn ihm ein $\mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{u}$ der Klasse C angehört.*

Beweis: In einem $\mathfrak{d}(\alpha)$ sind alle $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$, wenn überhaupt, auf der einen Seite des $\mathfrak{d}$ über die eine Randkurve mit dem Ausland verbunden, auf der andern Seite über die andere Randkurve; daraus folgt die Echtheit aller Zweige von $\mathfrak{C}'$ in einem $\mathfrak{d}(\alpha)$.

Betrachten wir also ein $\mathfrak{d}(\beta)$.

A. Gehört einem Zweig in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ ein $\mathfrak{o}$ oder ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C an, so verlassen die beiden an diesem $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ hängenden $\mathfrak{v}$ den $\mathfrak{d}(\beta)$ über die gleiche Randkurve; dieser Zweig verbindet also zwei Punkte der gleichen Randkurve miteinander, d. h. er ist unecht.

B. Gibt es im $\mathfrak{d}(\beta) = \mathfrak{d}_i$ Zweige, die aus genau einem $\mathfrak{o}$ und einem $\mathfrak{u}$ der Klasse A bestehen, also $PSKi$ sind, so muß $v_k = -v_l$ sein; dann gibt es nach Satz 6 keine $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse B im $\mathfrak{d}_i$; weiter sind aber alle Zweige im $\mathfrak{d}_i$, von den $PSKi$ abgesehen, unecht, da sonst $\mathfrak{C}'$ nicht schnittpunktfrei wäre. In diesem Falle ist also der Satz bewiesen. Liegt dieser Fall nicht vor, so gehören zu jedem Zweige des $\mathfrak{d}_i$ notwendig $\mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{u}$ der Klassen B oder C. Gehört aber zu einem Zweige ein $\mathfrak{o}$ oder ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C, so können nach Definition dieser Klasse weiter keine $\mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{u}$ mehr zu diesem Zweige gehören.

Wir haben also noch zu zeigen, daß alle Zweige im $\mathfrak{d}(\beta)$ echt sind, deren $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse B angehören. Da aber die $\mathfrak{o}$ der Klasse B in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ über eine andere Randkurve desselben mit dem Ausland verbunden sind wie die $\mathfrak{u}$ der Klasse B, so werden wir mit dem Beweis fertig sein, wenn Folgendes gezeigt ist:

(7 B) *Gehört einem Zweige in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ ein $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse B an, so gehört ihm auch ein $\mathfrak{u}[\mathfrak{o}]$ der Klasse B an; der Zweig ist dann also echt.*

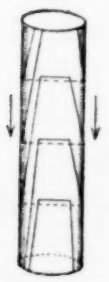

Fig. 6.

Ein $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse B ist im $\mathfrak{d}(\beta)$ wieder mit einem $\mathfrak{u}[\mathfrak{o}]$ verbunden; gehört dies auch zur Klasse B, so ist (7 B) bewiesen; es gehöre also zur Klasse A. Dann ist es mit noch einem von dem ersten verschiedenen $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ verbunden; wir zeigen, daß *dies nicht zur Klasse B gehören kann*. Damit wird dann (7 B) bewiesen sein, da der ausgeführte Prozeß nur endlich oft wiederholt werden kann, bis er zu Ende führt.

Gehörte dies $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ aber zur Klasse B, so würde sein freies $\mathfrak{v}$ auf der anderen Seite des $\mathfrak{d}(\beta)$ liegen wie das freie $\mathfrak{v}$ des Ausgangs-$\mathfrak{o}[-\mathfrak{u}]$, würde sich

[1]) cf. p. 14. Genau hat der Punkt b' den „Wert": $Sign\,(v_i + v_l)$.

[2]) Diese Gleichung bleibt richtig, solange beide Seiten $\neq 0$; ist aber v_i oder $v_l = 0$, so berück-

also mit dessen unfreiem $\mathfrak{v}$ überschneiden, was der Forderung der Schnittpunktfreiheit von C' wiederspräche, q. e. d.

I. *Sei für alle* $i = 1, 2, 3$ *der* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann befindet sich $\mathfrak{C}'$ in *Dehn*scher Normalform. Denn dem Postulat 1 (p. 5) ist nach Satz 7 genügt; 2,3 deshalb, weil alle außerhalb $\mathfrak{d}$ gelegenen Teile von $\mathfrak{C}'$ entweder $\mathfrak{v}$ sind oder zu *PUK* gehören; das Postulat 4 ist aus dem folgenden Grunde erfüllt: auf jeder Seite eines $\mathfrak{d}(\alpha)$ werden ebensoviele $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{u}$ über eine Grenzkurve mit dem Ausland verbunden wie über die andere; Postulat 5 ist von selbst erfüllt, da es keine *TLH* im $\mathfrak{C}'$ gibt.

II. *Sei* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$, *aber* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$. Dann ist notwendig $v_i = 0$.

Wegen Satz 7 können wir die im $\mathfrak{d}_i$ vorhandenen unechten Zweige durch Ausübung der N_1 und N_2 beseitigen. Dann wird aber $\mathfrak{C}'$ auf Normalform gebracht sein. Denn die N_1 und die N_2 erzeugen nur Verbindungen des $\mathfrak{d}_k$ mit dem $\mathfrak{d}_l$, die Postulat 2 und 3 genügen. Da es schließlich im $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ ebensoviele $\mathfrak{o}$ wie $\mathfrak{u}$ der Klasse C gibt, und da die $\mathfrak{o}$ der Klasse C über die eine, die $\mathfrak{u}$ über die andere Randkurve des $\mathfrak{d}_i$ mit dem Ausland verbunden sind, so wird auch Postulat 4 genügt. Im $\mathfrak{d}_k$ und im $\mathfrak{d}_l$ war aber, wie ad I gezeigt, alles in Normalform. — Das Postulat 5 kommt wieder nicht zur Anwendung, weil es im $\mathfrak{C}'$ keine *TLH* gibt und durch N_1, N_2 keine erzeugt werden.

III. *Es sei* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$ *und* $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$ [1]; dann sind notwendig alle $v \neq 0$.

Ursprünglich ist jedes $\mathfrak{u}$ der Klasse C durch seine $\mathfrak{v}$ mit zwei verschiedenen $\mathfrak{d}$ verbunden. Wenden wir aber erst in allen möglichen Fällen die N_1 an, so kann es vorkommen, daß beide $\mathfrak{v}$ ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ mit dem $\mathfrak{d}(\alpha)$ verbinden. In diesen Fällen und nur in diesen Fällen wird die N_3 anzuwenden sein.

Ein $\mathfrak{o}$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ ist durch seine $\mathfrak{v}$ mit einem $\mathfrak{d}(\alpha)$ und einem $\mathfrak{d}(\beta)$ verbunden; wendet man jetzt auf diese $\mathfrak{o}$ die N_1 an, so sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

Dies $\mathfrak{o}$ ist durch sein eines $\mathfrak{v}$ im andern $\mathfrak{d}(\beta)$

1. mit einem freien Zweige,
2. mit einem $\mathfrak{u}$ der Klasse B,
3. mit einem $\mathfrak{u}$ der Klasse C verbunden [2]).

Weiter sind keine Fälle möglich, da ein $\mathfrak{o}$ durch sein $\mathfrak{v}$ nicht wieder mit einem $\mathfrak{o}$ verbunden sein kann.

Nach Ausübung aller möglichen N_1 wird die N_3 genau auf die $\mathfrak{u}$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ anzuwenden sein, die mit $\mathfrak{o}$ der Klasse $C3$ im anderen $\mathfrak{d}(\beta)$ direkt verbunden sind.

Satz 8: *Nach Ausführung aller möglichen* N_1 *im* $\mathfrak{d}_i$ *und* $\mathfrak{d}_k$ *sind von den* $\mathfrak{u}$ *im* $\mathfrak{d}_i$ *und* $\mathfrak{d}_k$ *genau*

$$Max\,\{c_i + c_k - |v_l|, 0\}$$

für N_3 *zubereitet; die* N_2 *ist also nur noch auf die übrigen* $\mathfrak{u}$ *der Klasse* C *anzuwenden; deren Zahl ist:*

$$c_i - Max\,\{c_i + c_k - |v_l|, 0\} \quad im \quad \mathfrak{d}_i \quad und$$
$$c_k - Max\,\{c_i + c_k - |v_l|, 0\} \quad im \quad \mathfrak{d}_k\ [3]).$$

---

sichtigen wir nur die von Null verschiedene Seite der Gleichung. $v_i = v_l = 0$ ist durch die Forderung $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ ausgeschlossen ($\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\alpha)$).

[1]) Alle drei $\mathfrak{d}$ können offenbar nicht $= \mathfrak{d}(\beta)$ sein.

[2]) Hierdurch werde die Klasse C in die Klassen $C1$, $C2$, $C3$ eingeteilt.

[3]) Nach Satz 6, p. 9 ist $c_i \leqq |v_l|$, $c_k \leqq |v_l|$.

Beweis: Teilen wir im $\mathfrak{d}_i$ und im $\mathfrak{d}_k$ die $\mathfrak{o}$ der Klasse C in $\mathfrak{o}$ der Klassen $C1, C2, C3$ ein, wie es oben angegeben, so wird diese Einteilung durch die freien $\mathfrak{v}$ dieser $\mathfrak{o}$ bewirkt, die auf der l-Seite des $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_k]$ gelegen sind. Aus Satz 6 folgt aber für die Zahl der freien $\mathfrak{v}$ und freien Zweige, die den $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_k]$ auf der l-Seite über die gleiche Randkurve verlassen, daß diese Zahl $= |\nu_l|$ ist. Diese freien $\mathfrak{v}$ hängen alle entweder an $\mathfrak{o}$ oder alle an $\mathfrak{u}$ und zwar werden die $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ im $\mathfrak{d}_i$ auf derselben (I- oder II-) Seite ins Ausland verbunden, wie die $\mathfrak{u}[\mathfrak{o}]$ im $\mathfrak{d}_l$. Zählen wir jetzt im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_k]$ auf O vom UKl aus die auf der l-Seite gelegenen freien $\mathfrak{v}$ und freien Zweige, so kommen zuerst die freien $\mathfrak{v}$, die an $\mathfrak{u}$ der Klasse C hängen, dann die an $\mathfrak{u}$ der Klasse B hängenden, weiter die freien Zweige und endlich die freien $\mathfrak{v}$, die an $\mathfrak{o}$ der Klasse B, dann die, die an $\mathfrak{o}$ der Klasse C hängen. Also gibt es dann und nur dann $\mathfrak{o}$ der Klasse $C3$ im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{d}_k]$, wenn $c_i > |\nu_l| - c_k$ $[c_k > |\nu_l| - c_i]$ ist; ihre Zahl ist dann $c_i + c_k - |\nu_l|$, q. e. d.

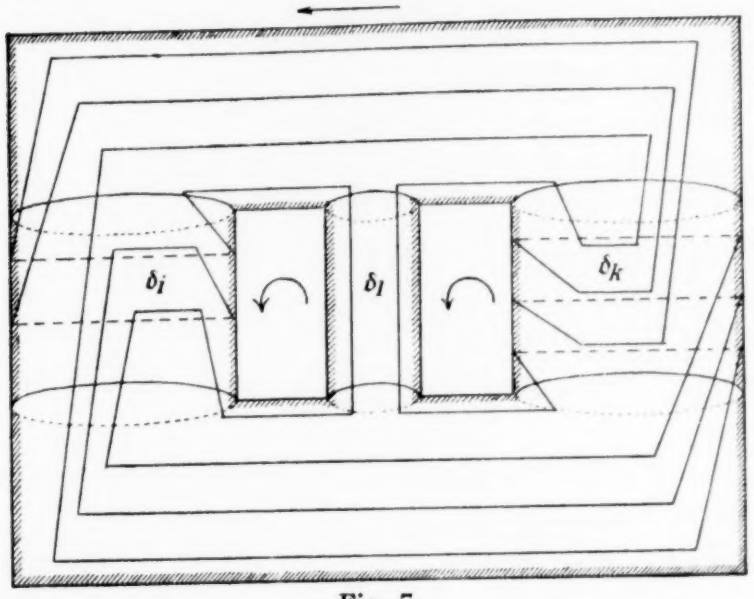

Fig. 7.

Wir sind jetzt in der Lage, den Vollständigkeitsbeweis zu führen:

$\mathfrak{E}'$ verstößt in den $\mathfrak{d}(\beta)$ gegen das Postulat 1 (cf. p. 5!); *weiter liegen keine Verstöße vor*; die unechten Zweige können aber wegen Satz 7, p. 11 durch sukzessive Anwendung der N_1 und der N_2, N_3 beseitigt werden; es ist also noch zu zeigen:

Üben wir erst, so oft es möglich ist, die N_1, dann die N_2, N_3 aus, so wird nicht gegen die Postulate 2—5 *verstoßen.*

Wegen Satz 6 ist die Zahl der $\mathfrak{o}$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ gleich der Zahl der $\mathfrak{u}$ der Klasse C im gleichen $\mathfrak{d}$, so daß also die Zahl der auszuübenden N_1 = der Zahl der auszuübenden N_2 + der Zahl der auszuübenden N_3 ist. Wegen Satz 8 ist weiter die Zahl der auszuübenden N_3 in beiden $\mathfrak{d}(\beta)$ = der Zahl der $\mathfrak{o}$ der Klasse $C3$. Hierdurch ist zwischen den auszuübenden N_1 einerseits, den N_2, N_3 andererseits eine umkehrbar eindeutige Zuordnung hergestellt, indem jedem N_1, das in einem $\mathfrak{d}$ an einem $\mathfrak{o}$ der Klasse C_3 angreift, ein N_3 zugeordnet wird, das im gleichen $\mathfrak{d}$ angreift, und den übrigen N_1 je ein N_2.

Ein Operationspaar $(N_1 N_2)$ erzeugt nur Kurvenstücke, die den Postulaten 2—5 *genügen.*

Denn jedes Element eines solchen Paares liefert eine Verbindungslinie der beiden $\mathfrak{d}(\beta)$, die ganz auf O gelegen, und zwar liegt die eine auf IO, die andere auf IIO.

Zwischen den Operationspaaren $(N_1 N_3)$, die an dem einen $\mathfrak{d}(\beta)$ angreifen, und denen, die am anderen $\mathfrak{d}(\beta)$ angreifen, läßt sich nach Satz 8 eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen:

Ein solches Paar von Operationspaaren $(N_1 N_3)$ erzeugt nur Kurvenstücke, die den Postulaten 2—5 *genügen.*

Denn die $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ des einen $\mathfrak{d}(\beta)$ finden ihre Verbindung ins Ausland auf $IO[IIO]$, wenn sie diese Verbindung im andern $\mathfrak{d}(\beta)$ auf $IIO[IO]$ finden. Also entsteht im $\mathfrak{d}^*(\alpha)$ ein Paar von TLH, q. e. d.

Definition der Windungszahl:

Die Zahl m_i ist gleich der Zahl der echten Zweige des $\mathfrak{d}_i$; durchlaufen wir einen echten Zweig des $\mathfrak{d}_i$ vom *SKi* bis zum *PSKi*, so treffen wir möglicherweise auf Schnittpunkte mit *UKl* bzw. *UKk*; erteilen wir jedem dieser Schnittpunkte den *Wert* $+1$ oder -1, je nachdem der Zweig den $UK(i+1)$ bzw. $-UK(i-1)$ von rechts nach links oder von links nach rechts bei seiner Durchlaufung kreuzt, *so ist die Summe über alle diese Werte im* $\mathfrak{d}_i$ *gleich* $2v_i'$, da alle Schnittpunkte entweder den Wert $+1$ oder alle den Wert -1 erhalten müssen. Die halbe Summe ist die *Windungszahl.*

Die Transformationsformeln:

11. Es sei $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann wird $m_i' = b_i + 2c_i + f_i$ und $v_i' = w_i + n_i$, wo n_i die Zahl der Windungen angibt, die durch Ausübung der N-Operationen auf andere $\mathfrak{d}$ im $\mathfrak{d}_i$ hinzukommen, und w_i die Windungszahl von $\mathfrak{C}'$ im $\mathfrak{d}_i$ angibt. w_i ist aber, vom Vorzeichen abgesehen, gleich der Zahl der u im $\mathfrak{d}_i$. Aus Satz 5 folgt also:

$$m_i' = |v_k + v_l| \text{ und wegen } UKi \to SKi,\ SKi \to -UKi\ ^{1}):$$

$$v_i' = Sign\,(v_k + v_l) \cdot \mu_i + n_i\ ^{2}).$$

12. Sei $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$.

Dann wird $m_i' = b_i + f_i$, $v_i' = w_i + n_i$. Vom Vorzeichen abgesehen, ist dieses Mal w_i = der Zahl der u der Klassen A und B, also:

$$v_i' = Sign\,(v_k + v_l) \cdot (a_i + b_i) + n_i\ .\ ^{3})$$

Aus Satz 6 folgt also:

$$\begin{aligned}
m_i' &= v^{kl} + |v_{kl} - \mu_i| - \mu_i, \\
v_i' &= Sign\,(v_k + v_l) \cdot \{\mu_i - Min\,(\mu_i, v_{kl})\} + n_i, \text{ da} \\
b_i + f_i &= Min\,(\mu_i, v^{kl}) - Min\,(\mu_i, v_{kl}) + Max\,(v^{kl} - \mu_i, 0) + Max\,(v_{kl} - \mu_i, 0) \\
&= Min\,(\mu_i, v^{kl}) + Max\,(v^{kl}, \mu_i) - \mu_i - Min\,(\mu_i, v_{kl}) + Max\,(v_{kl}, \mu_i) - \mu_i \\
&= v^{kl} + \mu_i - \mu_i + |v_{kl} - \mu_i| - \mu_i, \text{ und da} \\
a_i + b_i &= Max\,(\mu_i - v^{kl}, 0) + Min\,(\mu_i, v^{kl}) - Min\,(\mu_i, v_{kl}) \\
&= Max(\mu_i, v^{kl}) - v^{kl} + Min\,(\mu_i, v^{kl}) - Min\,(\mu_i, v_{kl}) \\
&= \mu_i + v^{kl} - v^{kl} - Min\,(\mu_i, v_{kl}) \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Es sind noch die n_i zu berechnen:

I. Wenn $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}\,(\alpha)$, so ist $n_i = n_k = n_l = 0$, da dann keine N-Operationen anzuwenden sind (cf. I, p. 12).

II. Sei $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$ und $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}\,(\alpha)$; dann ist notwendig $v_i = 0$. Wegen II, p. 12 sind dann die N_1 und die N_2 nur im $\mathfrak{d}_i$ anzuwenden, und zwar auf alle o bzw. u der Klasse C. Es wird also:

$$\begin{aligned}
n_i = 0,\ n_k &= Sign\,(v_l) \cdot c_i = Sign\,(v_l) \cdot Min\,(\mu_i, v_{kl}) \\
n_l &= Sign\,(v_k) \cdot c_i = Sign\,(v_k) \cdot Min\,(\mu_i, v_{kl}),
\end{aligned}$$

wie aus Satz 6 und der Schlußbemerkung bei Einführung der N_2 folgt.

III. Sei $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann wirken sich die Paare von Operationspaaren $(N_1 N_3)$ nur im $\mathfrak{d}_l$, dagegen die Operationspaare $(N_1 N_2)$ in allen $\mathfrak{d}$ aus (vgl. Satz 8 und p. 13!). Berücksichtigt man noch die Schlußbemerkung bei Einführung der N_2 und der N_3 (p. 10, 11), so ergibt sich:

---

[1]) cf. Anm. [3]), p. 6.

[2]) Für $v_k = v_l = 0$ sei $Sign\,(v_k + v_l) = 1$ gesetzt.

[3]) da das Vorzeichen von dem v bestimmt wird, auf dessen „Seite" die o [u] der Klasse B mit dem Ausland verbunden sind.

$$n_i = Sign\,(v_l)\cdot Min\,\{|v_l| - c_i,\ c_k\},$$
$$n_k = Sign\,(v_l)\cdot Min\,\{|v_l| - c_k,\ c_i\},$$
$$n_l = Sign\,(v_k + v_i)\cdot\{|n_i| + |n_k| + Max\,(c_k + c_i - |v_l|,\ 0)\}$$
$$= Sign\,(v_k + v_i)\cdot\{c_k + c_i - Max\,(c_k + c_i - |v_l|, 0)\}$$
$$= Sign\,(v_k + v_i)\cdot Min\,\{|v_l|, c_k + c_i\},$$
da $Sign\,(v_k) = Sign\,(v_i)$ für $v_k \neq 0,\ v_i \neq 0$ gilt.

Fall 2. *Enthalte* $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ *im* $\mathfrak{d}_i^*$ *im Gegensatz zu Fall* 1 (vgl. p. 7) *TLi*. Dies kann nur für ein i eintreten; weiter kann es dann im $\mathfrak{d}_i$ keine *PSKi* geben.

Da $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ die gleiche Zahl *TLi* enthalten und $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ ebensoviele *PSKk* wie $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ *PUKk* enthält und umgekehrt, so gilt:

$$\mu_i^* = {}^1/_2(m_i - m_k - m_l) > 0,\ \mu_k = m_l,\ \mu_l = m_k.$$

Wird dann auf $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ die durch Satz 3, p. 6 geforderte Verdrehung ausgeübt, so geht $\mathfrak{U}'(\mathfrak{C})$ in $\mathfrak{C}'$ über.

Zunächst haben wir zu untersuchen, wie sich die $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ des $\mathfrak{C}'$ im $\mathfrak{d}_i^*$ auf die Klassen A^*, B^*, C^* verteilen: Wir wollen diesen Fall auf einen Spezialfall des Satzes 5, p. 8 zurückführen; hierzu fassen wir den $\mathfrak{d}_i^*$ als einen $\mathfrak{d}$ auf; dies ist deshalb möglich, weil der $\mathfrak{d}_i^*$ sich wie jedes $\mathfrak{d}$ als ein „Zylinder" darstellt, d. h. er ist topologisches Bild einer Kugel mit zwei Löchern, also ein geeignet aufgeschnittener Torus; weiter befinden sich auf diesem Zylinder zwei „Drehgebiete", die er beide mit dem Drehring des *UKi* gemein hat. Da also in beiden „Drehgebieten" um die gleiche Zahl v_i verdreht wird, so haben wir es mit einem Spezialfall eines $\mathfrak{d}(a)$ zu tun, und es ergibt sich aus Satz 5 der

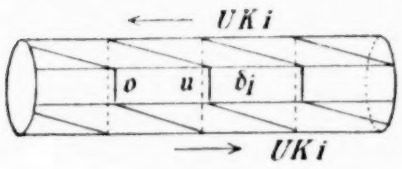

Fig. 8.

Satz 9: *Von den* $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ *des* $\mathfrak{d}_i^*$ *gehören*:
$a_i^* = Max\,(\mu_i^* - 2\,|v_i|, 0)$ *zur Klasse* A^*,
$b_i^* = Min\,\{Max\,(\mu_i^*, |v_i|), 2\,|v_i|\} - |v_i|$ [1]) *zu jeder der zu einer Randkurve des* $\mathfrak{d}_i^*$ *gehörenden Unterklassen der Klasse* B^*,
$c_i^* = Min\,\{\mu_i^*, Max\,(2\,|v_i| - \mu_i^*, 0)\}$ *zur Klasse* C^*.
Auf jeder der durch den $\mathfrak{d}_i$ *bestimmten Seiten des* $\mathfrak{d}_i^*$ *gibt es*
$f_i^* = Max\,(|v_i| - \mu_i^*, 0)$ *freie Zweige.*

Wir zerteilen jetzt jedes u im $\mathfrak{d}_i^*$ in genau zwei Teile: u_I und u_{II}, derart daß u_J ganz auf JU $(J = I, II)$ gelegen ist. An jedem u_J hängt genau ein $\mathfrak{v}$.

Verbindet dieses $\mathfrak{v}$ *das* u_J *mit einem echten Zweige des* $\mathfrak{d}_i$, *ohne vorher einen anderen* $\mathfrak{d}$ *zu kreuzen, so gehört* u_J *zur Klasse* D_J, *im anderen Falle gehört es zur Klasse* $\overline{D}$.

Von den beiden u_J, in die ein u der Klasse A^* zerfällt, gehören beide zur Klasse D_J; von den aus einem u der Klasse B^* entstandenen gehört eines zur Klasse $\overline{D}$, das andere zur Klasse D_J; schließlich gehören die beiden u_J zur Klasse $\overline{D}$, die aus einem u der Klasse C^* entstanden sind.

Normieroperationen:

Aus der Definition der Klasse D folgt, daß die u_J der Klasse D genau einer *TLH* angehören; dagegen verstoßen die u_J der Klasse $\overline{D}$ gegen die Postulate 2 und 3; sie werden also beseitigt werden müssen.

---

[1]) Aus dem Ausdruck für b_i in Satz 5, p. 8 ergibt sich zunächst für die aus o und u bestehenden Unterklassen $2\,b_i^*$; da diese Unterklasse aber gleichviel o und u enthält, so ergibt sich unser Ausdruck.

Die N_4.

Sei im $\mathfrak{d}_i^*$ ein u_J der Klasse $\overline{D}$ gegeben; dann bestehen zwei Möglichkeiten: entweder es ist direkt mit einem $\mathfrak{d}_k$ $(k \neq i)$ verbunden oder mit einem unechten Zweige im $\mathfrak{d}_i$. Der zweite Fall läßt sich durch „Glattziehen" (vgl. die N_1) auf den ersten zurückführen; außerdem wird er uns nicht begegnen, so daß wir uns auf die Behandlung des ersten Falles beschränken können.

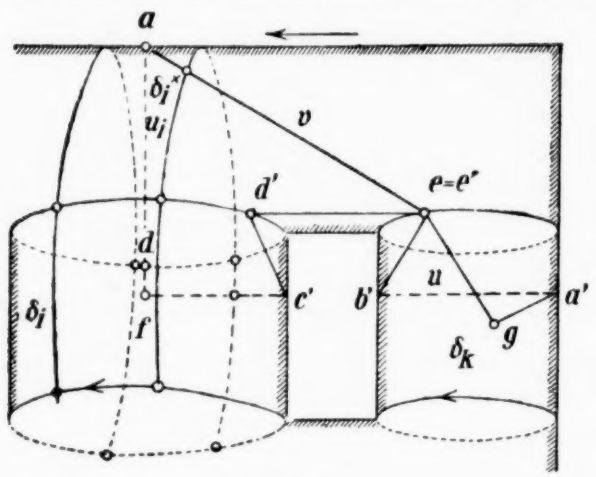

Fig. 9.

Sei a der auf UKi gelegene Endpunkt des u_J, f der andere Endpunkt, der also auf einer der Randkurven des $\mathfrak{d}_i$ gelegen ist. Sei d der Schnittpunkt des u_J mit einer Randkurve des $\mathfrak{d}_i$; es kann also $d = f$ sein, was aber im allgemeinen nicht der Fall ist. Am Punkte a hängt ein $\mathfrak{v}$, das den $\mathfrak{d}_i^*$ verläßt und im Punkte e in den $\mathfrak{d}_k$ zum erstenmal eintritt; sei g ein Punkt dieses $\mathfrak{v}$, der den Punkt e von dem Punkt trennt, in dem $\mathfrak{v}$ zum erstenmal den $\mathfrak{d}_k$ verläßt.

Sei a' ein im $\mathfrak{d}_k$ auf UKi gelegener Punkt, b' im $\mathfrak{d}_k$ auf UKl, c' im $\mathfrak{d}_i$ auf UKl gelegen; weiter sei d' auf der gleichen Randkurve des $\mathfrak{d}_i$ wie d, aber im Drehring des UKl gelegen, und schließlich sei $e' = e$. — Wir zeichnen den Kurvenzug:

$$g\ a'\ \mathfrak{u}\ b'\ e'\ d'\ c'\ f, \text{ wo } b'\ e'\ d'\ c' \text{ ein auf } O \text{ gelegenes } \mathfrak{v} \text{ ist.}$$

Die Operation N_4 besteht dann in der Deformation, die den Kurvenzug $g\ e\ \mathfrak{v}\ a\ u_J\ f$ in den soeben konstruierten Kurvenzug überführt. Diese N_4 läßt dann den $\mathfrak{d}_l$ völlig unberührt und verändert auch nicht die Schnittpunktzahlen mit Randkurven des $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{d}_k$.

Im $\mathfrak{d}_k$ wird die Zahl der $\mathfrak{u}$ um eins und die Windungszahl um $Sign\,(v_i)$ vermehrt [1]).

Ist schließlich im $\mathfrak{d}_i^*$ noch ein u_{J+I} gegeben, das der Klasse $\overline{D}$ angehört, so ist es also mit dem $\mathfrak{d}_l$ verbunden und auf es die N_4 ebenfalls anzuwenden; ein solches Paar von N_4 verändert die Windungszahl im $\mathfrak{d}_i$ um $-\,Sign(v_i)$ [1]).

Jede N_4 zerstört im $\mathfrak{d}_i^*$ ein u_J der Klasse $\overline{D}$.

Die N_1^*.

Im $\mathfrak{d}_i^*$ gebe es ein u_J der Klasse $\overline{D}$, das durch sein $\mathfrak{v}$ direkt, d. h. ohne vorher ein $\mathfrak{d}$ zu kreuzen, mit einem $\mathfrak{o}$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$ verbunden ist. Dieses $\mathfrak{o}$ ist dann durch sein anderes $\mathfrak{v}$ mit dem $\mathfrak{d}_i$ direkt verbunden.

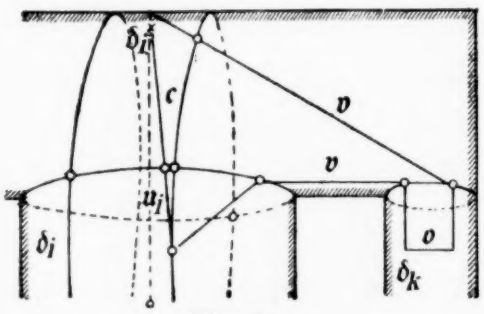

Fig. 10.

Die N_1^* besteht dann in einer Deformation von $\mathfrak{C}'$, die den Kurvenzug $\mathfrak{v}\ \mathfrak{o}\ \mathfrak{v}$ „glattzieht", d. h. ihn in eine Kurve $\mathfrak{c}$ überführt, die ganz im $\mathfrak{d}_i^*$ gelegen ist. Diese N_1^* wird also auf den $\mathfrak{d}_k$ angewandt; sie zerstört dort einen unechten Zweig (vgl. Satz 7, p. 11!) und verwandelt im $\mathfrak{d}_i^*$ ein u_J der Klasse $\overline{D}$ in eins der Klasse D. Sonst bleibt alles ungeändert.

---

[1]) Genauer: Die Punkte a' und b' haben den Wert $Sign\,(v_i)$, dagegen c' den Wert $-\,Sign\,(v_i)$.

Vollständigkeit des Operationensystems:

Verstöße gegen die Postulate 1—5, p. 5 stellen im wesentlichen nur die u_J der Klasse $\overline{D}$ im $\mathfrak{d}_i^*$ und die $o[u]$ der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ dar; diese werden sich aber durch die N_1, N_2, N_3, N_4 und N_1^* beseitigen lassen.

I. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann sind nur noch im $\mathfrak{d}_i^*$ Verstöße gegen die Postulate zu beseitigen (vgl. I, p. 12!).

Satz 10: *Im* $\mathfrak{d}_i^*$ *gehören von den* u_I *und* u_{II} *je* $a_i^* + b_i^*$ *zur Klasse D. Je ein solches* u_I *und ein* u_{II} *konstituiert ein Paar von TLH; diese* u_J *sind also auf* $a_i^* + b_i^*$ *Paare von TLH verteilbar.*

Beweis: Auf Grund der Bemerkung p. 15 unten brauchen wir den Satz nur für die u_J der Klasse D zu beweisen, die aus u der Klasse B^* entstanden. Nach Satz 9, p. 15 sind aber die u der Klasse B^* in zwei Unterklassen von je b_i^* Individuen aufgeteilt, so daß die Individuen einer Unterklasse zur gleichen Randkurve des $\mathfrak{d}_i^*$ gehören; offenbar liegen auch die freien $\mathfrak{v}$ der u einer Unterklasse sämtlich auf der gleichen, von $\mathfrak{d}_i$ bestimmten, Seite des $\mathfrak{d}_i^*$. Also ist eine dieser Unterklassen so beschaffen, daß die sämtlichen in ihr enthaltenen u_I zur Klasse D, ihre sämtlichen u_{II} zur Klasse $\overline{D}$ gehören, während für die andere Unterklasse das Umgekehrte gilt. Mithin liefert die eine Unterklasse u_I der Klasse D, die andere u_{II} der Klasse D, und zwar jede b_i^*, q. e d.

Satz 11: *Jede Anwendung der* N_4 *genügt den Postulaten* 2—4, p. 5.

Beweis: Die N_4 erzeugt nur Verbindungen verschiedener $\mathfrak{d}$, welche Verbindungen ganz auf O gelegen sind (Postulat 2, 3). Nach Satz 9, p. 15 entspricht jedem u des $\mathfrak{d}_i^*$ das auf der einen der durch $\mathfrak{d}_i$ bestimmten Seiten des $\mathfrak{d}_i^*$ mit dem $\mathfrak{d}_k$ verbunden ist, umkehrbar eindeutig ein $\mathfrak{o}$ des $\mathfrak{d}_i^*$, das auf der anderen Seite des $\mathfrak{d}_i^*$ mit dem $\mathfrak{d}_k$ verbunden ist (Postulat 4), q. e. d.

Übt man die N_4 *im* $\mathfrak{d}_i^*$, *so oft es möglich ist, d. h.* $(b_i^* + c_i^*)$*-mal auf jeder Seite des* $\mathfrak{d}_i^*$ *aus, so ist* $\mathfrak{C}'$ *in Dehnsche Normalform übergeführt.*

Denn nach Satz 10 ist Postulat 5, nach Satz 11 sind die Postulate 2—4 erfüllt, und Postulat 1 erfüllte bereits $\mathfrak{C}'$.

II. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Dann wird im $\mathfrak{d}_i^*$ gegen Postulate 2, 3 und im $\mathfrak{d}_k$ gegen Postulat 1 verstoßen.

Satz 12 a: *Die Zahl* e_k *der möglichen Anwendungen der* N_1^* *auf* $\mathfrak{o}$ *im* $\mathfrak{d}_k^*$ *ist gleich der Zahl der Anwendungen der* N_3 *auf* u *des* $\mathfrak{d}_k$, *und zwar ist*

(12 a) $$e_k = c_k - Min\{Max(0, |v_i| - \mu_i^*), c_k\} = c_k - Min(f_i^*, c_k).$$

Beweis: Im $\mathfrak{d}_k$ ist dann und nur dann die N_1^* auf ein $\mathfrak{o}$, die N_3 auf ein u anwendbar, wenn dies $o[u]$

1. der Klasse C angehört und

2. seine beiden freien $\mathfrak{v}$ mit Zweigen des $\mathfrak{d}_i$ zusammenhängen. Diese Bedingung ist aber sicher dann und nur dann nicht erfüllt, wenn eines der freien $\mathfrak{v}$ direkt an einen freien Zweig im $\mathfrak{d}_i^*$ anknüpft.

Gibt es keine freien Zweige im $\mathfrak{d}_i^*$, d. h. ist $f_i^* = 0$, so sind also alle $o[u]$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_k$ für $N_1^*[N_3]$ zubereitet, d. h. $e_k = c_k$.

Sei also $f_i^* > 0$. Dann wird nach Satz 9, p. 15

$$a_i^* = b_i^* = 0 \text{ und } c_i^* = \mu_i^*.$$

Da $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$ ist, gehören im $\mathfrak{d}_k$ die $\mathfrak{o}$ der Klasse C alle zu der einen Randkurve, die u der Klasse C alle zur anderen Randkurve des $\mathfrak{d}_k$, d. h. sie sind über diese Randkurve

mit dem Ausland verbunden. Wir können also im $\mathfrak{d}_k$ unter den $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse C eine Reihenfolge festlegen, indem wir sie von der Randkurve aus zählen, zu der sie gehören.

Unter den $\mathfrak{o}$ der Klasse C kommen dann zuerst die, von denen ein freies $\mathfrak{v}$ an einen freien Zweig des $\mathfrak{d}_i^*$ anknüpft, auf die also die N_1 anzuwenden, und erst, wenn alle freien Zweige des $\mathfrak{d}_i^*$ erschöpft sind, kommen die $\mathfrak{o}$, deren beide freie $\mathfrak{v}$ mit Zweigen des $\mathfrak{d}_i$ zusammenhängen, auf die also die N_1^* anzuwenden ist. Ebenso kommen unter den $\mathfrak{u}$ zuerst die, von denen ein freies $\mathfrak{v}$ an einen freien Zweig im $\mathfrak{d}_i^*$ anknüpft, auf die also die N_2 anzuwenden, dann die $\mathfrak{u}$, deren beide freie $\mathfrak{v}$ an Zweige des $\mathfrak{d}_i$ anknüpfen, auf die also die N_3 anzuwenden ist. Damit haben wir gefunden:

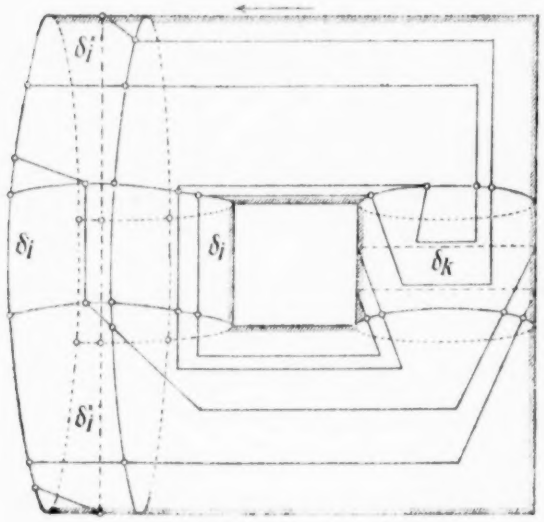

Fig. 11.

Die Anzahl der Anwendungen der N_1^* ist gleich c_k — der Anzahl der Anwendungen von N_1;

die Anzahl der Anwendungen von N_2 ist gleich c_k — der Anzahl der Anwendungen der N_3.

Also wird Satz 12 a bewiesen sein, wenn wir bewiesen haben:

Satz 12 b: *Die Zahl $c_k - e_k$ der Anwendungen der N_1 im $\mathfrak{d}_k$ ist gleich der Zahl der Anwendungen der N_2 im $\mathfrak{d}_k$:*

$$(12\,b) \qquad c_k - e_k = Min\,(f_i^*, c_k).$$

Beweis: Die Zahl der Anwendungen der $N_1[N_2]$ im $\mathfrak{d}_k$ ist gleich der Zahl der $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_k$, deren eines freies $\mathfrak{v}$ an einen freien Zweig des $\mathfrak{d}_i^*$ anknüpft. Dies tun aber die ersten $\mathfrak{o}[\mathfrak{u}]$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_k$, woraus als ihre Zahl (12 b) folgt, q. e. d.

Führt man nacheinander, so oft es möglich ist, erst die N_1, dann die N_1^*, schließlich die N_2, N_3, N_4 aus, so ist $\mathfrak{C}'$ in Dehnsche Normalform übergeführt.

Da wir nach Satz 10, p. 17 alle schon vor Ausübung der N-Operationen vorhandenen *TLH* paaren können, so bestehen alle Verstöße gegen die Postulate (p. 5) in den unechten Zweigen des $\mathfrak{d}_k$ und in den $\mathfrak{u}_J$ der Klasse $\overline{D}$ im $\mathfrak{d}_i^*$. Diese lassen sich aber durch die N-Operationen sämtlich beseitigen; es ist also nur noch zu zeigen, daß bei Ausführung derselben keine neuen Verstöße vorkommen.

Wegen Satz 12 b können wir die anzuwendenden N_1 und N_2 eindeutig zu Operationspaaren $(N_1 N_2)$ zusammenfassen, die gegen die Postulate nicht verstoßen, wie p. 13 gezeigt. Nach Satz 12 a können wir die Operationen N_1^* den N_3 umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß jedem Operationspaar $(N_1^* N_3)$ ein Paar von *TLH* entspricht; denn die beiden Operationen greifen auf verschiedenen der durch $\mathfrak{d}_i$ bestimmten Seiten des $\mathfrak{d}_i^*$ an (Postulat 5). Schließlich genügen die N_4 nach Satz 11, p. 17 den Postulaten.

III. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\beta)$.

Dann gibt es in allen drei $\mathfrak{d}$ Verstöße gegen die Postulate.

Die Sätze 12 a, b bleiben dann für beide $\mathfrak{d}(\beta)$ mit der Einschränkung richtig, daß durch Ausübung der N_1 auf $\mathfrak{o}$ ein Teil der für N_2 zubereiteten $\mathfrak{u}$ für N_3 zubereitet wird.

Ein $\mathfrak{u}$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{d}_l]$ heißt ein kritisches $\mathfrak{u}$, wenn eins seiner freien $\mathfrak{v}$ nach Durchkreuzung des $\mathfrak{d}_i^*$ — in Form eines freien Zweiges — an ein $\mathfrak{o}$ der Klasse C im $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$ anknüpft.

Diese kritischen $\mathfrak{u}$ stellen also die „Einschränkung des Geltungsbereiches“ der Sätze 12 a, b dar. Es gilt aber

Satz 13: *Die Zahl der kritischen* u *ist sowohl im* $\mathfrak{d}_k$ *als auch im* $\mathfrak{d}_l$

(13) $$Z(i) = Max\{0, Min(f_i^*, c_l) + Min(f_i^*, c_k) - f_i^*\}.$$

Beweis: Die o eines $\mathfrak{d}(\beta)$ sind sämtlich über die eine seiner Randkurven mit dem Ausland verbunden, die u über die andere, abgesehen von den o[u] der Klasse A. Sind dann etwa die o des $\mathfrak{d}_k$ auf I ins Ausland verbunden, so die o des $\mathfrak{d}_l$ auf II und umgekehrt. Also münden auf der einen der durch $\mathfrak{d}_i$ bestimmten Seiten des $\mathfrak{d}_i^*$ nur v ein, die entweder an freien Zweigen oder an o des $\mathfrak{d}_k$ oder an u des $\mathfrak{d}_l$ hängen, auf der anderen Seite nur solche v, die entweder an freien Zweigen oder an o des $\mathfrak{d}_l$ oder an u des $\mathfrak{d}_k$ hängen. Die Zahl der kritischen u im $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{d}_l]$ ist also gleich der Zahl $Z(i)$ der freien Zweige im $\mathfrak{d}^*$, die einerseits mit o der Klasse C im $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$, andererseits mit u der Klasse C im $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{d}_l]$ verbunden sind. Ist $f_i^* = 0$, so ist also sicher $Z(i) = 0$, womit (13) in diesem Spezialfall verifiziert ist.

Sei also $f_i^* > 0$.

Unter den freien Zweigen auf der einen der durch $\mathfrak{d}_i$ bestimmten Seiten des $\mathfrak{d}_i^*$ sind, vom UKi aus gezählt, nach dem Beweis der Sätze 12 a, b, p. 17/18 die ersten $c_l - e_l$ $[c_k - e_k]$ mit u der Klasse C des $\mathfrak{d}_l[\mathfrak{d}_k]$ und die letzten $c_k - e_k$ $[c_l - e_l]$ mit o der Klasse C des $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{d}_l]$ verbunden.

Also wird $Z(i)$ = der Zahl der Individuen des Durchschnitts dieser beiden Mengen freier Zweige, d. h. $Z(i) = Max(0, c_l - e_l + c_k - e_k - f_i^*)$, woraus nach Satz 12 b unser Satz folgt, q. e. d.

Übt man, so oft es möglich ist, nacheinander die N_1, *dann die* N_1^*, *schließlich die* N_2, N_3, N_4 *aus, so ist* $\mathfrak{C}'$ *in Dehnsche Normalform übergeführt.*

Die schon vor Ausübung aller N-Operationen vorhandenen TLH lassen sich wegen Satz 10, p. 17 zu Paaren zusammenfassen (Postulat 5).

Gegen die Postulate verstoßen in $\mathfrak{C}'$ die o[u] der Klasse C in einem $\mathfrak{d}(\beta)$ und die u_J der Klasse $\bar{D}$ im $\mathfrak{d}_i^*$. Diese werden durch N-Operationen beseitigt.

Nach Satz 12 a lassen sich die schon vor Ausübung der N_1 möglichen N_3 je mit einem N_1^* so paaren, daß sie ein Paar von TLH erzeugen. Ebenso lassen sich die nach Ausübung der N_1 möglichen N_3 wegen Satz 14 so paaren, daß sie je ein Paar von TLH erzeugen (Postulat 5).

Die N_1, die keine u für N_3 zubereiten, und die noch möglichen, im gleichen $\mathfrak{d}$ angreifenden N_2 lassen sich wegen Satz 13, p. 19 und Satz 12 b, p. 18 einander so umkehrbar eindeutig zuordnen, daß die entstehenden Operationspaare (N_1N_2) wegen p. 13 nicht gegen die Postulate verstoßen. — Im $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{d}_l]$ ist ihre Zahl

$$c_k - e_k - Z(i)\,[c_l - e_l - Z(i)].$$

Schließlich verstoßen die N_4 wegen Satz 11, p. 17 nicht gegen die Postulate.

Die Transformationsformeln:

Im $\mathfrak{d}_i$ entsprechen jedem Paar von TLH zwei echte Zweige. Weiter ändert keine der N-Operationen die Zahl der echten Zweige im $\mathfrak{d}_i$; diese ist aber vor Ausübung der N-Operationen gleich der Zahl der o und der u im $\mathfrak{d}_i^*$, vermehrt um die Zahl der freien Zweige, die durch Verdrehung um UKk und UKl entstehen. Also wird

$$m_i' = 2\mu_i^* + |\nu_k| + |\nu_l|.$$

I. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\alpha)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Jede Ausübung der N_4 erhöht die Windungszahl im $\mathfrak{d}_i$ um $-\frac{1}{2}\,Sign(\nu_i)$, im $\mathfrak{d}_k$ und im $\mathfrak{d}_l$ je um $Sign(\nu_i)$ (cf. Anm.[1]), p. 16). Weiter sind keine N-Operationen auszuführen; vor Ausübung der N_4 gab es aber im $\mathfrak{d}_i$ keine Schnittpunkte mit UKl oder UKk.

Also wird:

$$\left.\begin{aligned} v_i' &= -\,Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^*) \\ n_k &= n_l = Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^*) \end{aligned}\right\} \text{ cf. p. 17!}$$

II. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

Die Ausübungen der N_1, N_1^* lassen die Windungszahlen ungeändert; jede im $\mathfrak{d}_k$ angewandte N_2 vermehrt die Windungszahlen im $\mathfrak{d}_l$ und im $\mathfrak{d}_i$ um je $Sign\,(v_i)$ bezw. $Sign\,(v_l)$; jede im $\mathfrak{d}_k$ angewandte N_3 vermehrt die Windungszahl im $\mathfrak{d}_i$ um $^1/_2\,Sign\,(v_k + v_l)$. Wegen Satz 12 b, p. 18, Satz 12 a, p. 17 und unter Berücksichtigung dessen, daß jede Ausübung der N_1^* eine Ausübung der N_4 verhindert, folgt:

$$\begin{aligned} v_i' &= Sign\,(v_l)\cdot Min\,(f_i^*, c_k) + {}^1/_2\,Sign\,(v_k + v_l)\cdot e_k - Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* - {}^1/_2\,e_k) \\ &= -\,Sign\,(v_i)\cdot\{Min\,(f_i^*, c_k) + b_i^* + c_i^*\} \\ &= -\,Sign\,(v_i)\cdot\{c_k - e_k + b_i^* + c_i^*\}, \end{aligned}$$

da $Sign\,(v_l) = Sign\,(v_k) = -\,Sign\,(v_i)$ ist.

$$\begin{aligned} n_l &= Sign\,(v_i)\cdot Min\,(f_i^*, c_k) + Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^*) \\ n_k &= Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* - e_k) \\ &= Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* + Min\,(f_i^*, c_k) - c_k). \end{aligned}$$

III. *Sei* $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\beta)$.

Dann müssen die N_2, N_3, N_1^* im $\mathfrak{d}_k$ und im $\mathfrak{d}_l$ angewandt werden, und es ergibt sich, wie ad II:

$$\begin{aligned} v_i' &= Sign\,(v_l)\cdot(c_k - e_k - Z(i)) + Sign\,(v_k)\cdot(c_l - e_l - Z(i)) \\ &\quad + {}^1/_2\,Sign\,(v_k + v_l)\cdot(e_k + Z(i) + e_l + Z(i)) - Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* - {}^1/_2\,e_k - {}^1/_2\,e_l) \\ &= -\,Sign\,(v_i)\cdot(c_k - e_k + c_l - e_l - 2Z(i) + {}^1/_2\,(e_k + e_l) + Z(i) + b_i^* + c_i^* - {}^1/_2\,(e_k + e_l)) \\ &= -\,Sign\,(v_i)\cdot\{Min\,(f_i^*, c_k) + Min\,(f_i^*, c_l) - Z(i) + b_i^* + c_i^*\} \\ n_l &= Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* - e_l) + Sign\,(v_i)\cdot(c_k - e_k - Z(i)) \\ &= Sign\,(v_i)\cdot(Min\,(f_i^*, c_k) - e_l + b_i^* + c_i^* - Z(i)) \\ n_k &= Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^* - e_k + c_l - e_l - Z(i)), \end{aligned}$$

da $Sign\,(v_l) = -\,Sign\,(v_i) = Sign\,(v_k)$ ist.

Tafel der Transformationsformeln der *Dehn*schen Zahlen bei Ausübung von a. [1])

Fall 1. Es seien alle $\mu_i \geqq 0$.

I. $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

$$m_i' = |\,v_k + v_l\,|, \quad v_i' = Sign\,(v_k + v_l)\cdot\mu_i$$

II. $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

$$\begin{aligned} m_i' &= \nu^{kl} + |\,\nu_{kl} - \mu_i\,| - \mu_i, \quad v_i = Sign\,(v_k + v_l)\cdot(\mu_i - Min\,(\mu_i, \nu_{kl})). \\ m_k' &= |\,v_l + v_i\,|, \quad v_k' = Sign\,(v_l + v_i)\cdot(\mu_k + Min\,(\mu_i, \nu_{kl})) \\ m_l' &= |\,v_k + v_i\,|, \quad v_l' = Sign\,(v_k + v_i)\cdot(\mu_l + Min\,(\mu_i, \nu_{kl})) \end{aligned}$$

III. $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta)$, $\mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

$$\begin{aligned} m_i' &= \nu^{kl} + |\,\nu_{kl} - \mu_i\,| - \mu_i, \\ v_i' &= Sign\,(v_k + v_l)\cdot\{\mu_i - Min\,(\mu_i, \nu_{kl})\} + Sign\,(v_l)\cdot Min\,(|\,v_l\,| - c_i, c_k) \\ m_k' &= \nu^{li} + |\,\nu_{li} - \mu_k\,| - \mu_k \\ v_k' &= Sign\,(v_l + v_i)\cdot(\mu_k - Min\,(\mu_i, \nu_{kl})) + Sign\,(v_l)\cdot Min\,(|\,v_l\,| - c_k, c_i) \\ m_l' &= |\,v_k + v_i\,|, \; v_l' = Sign\,(v_k + v_i)\cdot\{\mu_i + Min\,(|\,v_l\,|, c_k + c_i)\}. \end{aligned}$$

Fall 2. Es sei $\mu_i^* > 0$. Dann ist stets $m_i' = 2\mu_i^* + |\,v_k\,| + |\,v_l\,|$.

I. $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\alpha)$.

$$v_i' = -\,Sign\,(v_i)\cdot(b_i^* + c_i^*)$$

---

[1]) cf. *M. Dehn*, l. c., p. 8/9.

$$m_k' = |\nu_l + \nu_i|, \quad \nu_k' = Sign\,(\nu_l + \nu_i)\cdot(\mu_k + b_i^* + c_i^*)$$
$$m_l' = |\nu_k + \nu_i|, \quad \nu_l' = Sign\,(\nu_k + \nu_i)\cdot(\mu_l + b_i^* + c_i^*)$$

II. $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta), \quad \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(a).$

$$\nu_i' = -Sign\,(\nu_i)\cdot(b_i^* + c_i^* + Min\,(f_i^*, c_k))$$
$$m_k' = \nu^{li} + |\nu_{li} - \mu_k| - \mu_k$$
$$\nu_k' = Sign\,(\nu_l + \nu_i)\cdot(\mu_k - Min\,(\mu_i, \nu_{kl})) + Sign\,(\nu_i)\cdot(b_i^* + c_i^* + Min\,(f_i^*, c_k) - c_l)$$
$$m_l' = |\nu_k + \nu_i|, \quad \nu_l' = Sign\,(\nu_k + \nu_i)\cdot\mu_l + Sign\,(\nu_i)\cdot(b_i^* + c_i^* + Min\,(f_i^*, c_k))$$

III. $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}(\beta), \ \mathfrak{d}_l = \mathfrak{d}(\beta).$

$$\nu_i' = -Sign\,(\nu_i)\cdot\{Min\,(f_i^*, c_k) + Min\,(f_i^*, c_l) + b_i^* + c_i^* - Z(i)\}$$
$$m_k' = \nu^{li} + |\nu_{li} - \mu_k| - \mu_k$$
$$\nu_k' = Sign\,(\nu_l + \nu_i)\cdot\{\mu_k - Min\,(\mu_k, \nu_{li})\} + Sign\,(\nu_i)\cdot\{Min\,(f_i^*, c_l) - e_k + b_i^* + c_i^* - Z(i)\}$$
$$m_i' = \nu^{ki} + |\nu_{ki} - \mu_l| - \mu_l$$
$$\nu_l' = Sign\,(\nu_k + \nu_i)\cdot\{\mu_l - Min\,(\mu_l, \nu_{ki})\} + Sign\,(\nu_i)\cdot\{Min\,(f_i^*, c_k) - e_l^* + b_i^* + c_i - Z(i)\}$$
$$Z(i) = Max\,\{0, Min\,(f_i^*, c_l) + Min\,(f_i^*, c_k) - f_i^*\}.$$

§ 3. Die Abbildungstypengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$.

1. Die Torsionen.

Um die Untergruppe $\mathfrak{L}$ zu der vollständigen Gruppe $\mathfrak{A}$ zu erweitern, müssen wir noch ein Element von unendlich hoher Ordnung definieren. Da jede Abbildung von $\mathfrak{F}$ zu genau einem Typus gehört, so werden wir durch Angabe einer speziellen topologischen Abbildung von $\mathfrak{F}$ den gesuchten Abbildungstypus eindeutig festlegen.

Wir bilden den $\mathfrak{d}_1$ auf einen ebenen Kreisring $\mathfrak{R}$ ab, der von zwei konzentrischen Kreisen K_i $(i = 1, 2)$ vom Radius R_i $(R_1 < R_2)$ berandet wird. Hierbei sei K_1 das Bild des $SK1$, K_2 das des $PSK1$. Die Punkte von $\mathfrak{R}$ werden durch Polarkoordinaten r, φ mit $R_1 \leqq r \leqq R_2$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ dargestellt [1]). Wir geben jetzt eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf sich an, bei der die K_i punktweise in sich übergehen:

$$(r, \varphi) \to \left(r, \varphi + 2\pi\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}\right).$$

Diese Abbildung von $\mathfrak{R}$ definiert eine topologische Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf sich, bei der alle nicht im Inneren von $\mathfrak{d}_1$ gelegenen Punkte in Ruhe bleiben. Diese Abbildung definiert uns wieder den gesuchten Abbildungstypus: die Torsion t. Die Transformationsformeln der *Dehn*schen Zahlen bei Ausübung von t lauten:

$$m_i' = m_i \text{ für } i = 1, 2, 3$$
$$\nu_1' = \nu_1 + m_1, \quad \nu_2' = \nu_2, \quad \nu_3' = \nu_3.$$

2. Vollständigkeit des Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}$.

Ebenso wie t als Torsion von $\mathfrak{d}_1$ sei t_i als Torsion von $\mathfrak{d}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ definiert. Dann gilt:

$$t_1 = t,$$
$$t_2 = b^4\, t\, b^2,$$
$$t_3 = b^2\, t\, b^4.$$

Die Transformationsformeln der *Dehn*schen Zahlen bei Ausübung von $t_i^{\pm 1}$ lauten:

$$m_i' = m_i, \quad \nu_i' = \nu_i \pm m_i$$
$$m_k' = m_k, \quad \nu_k' = \nu_k \text{ für } k \neq i.$$

---

[1]) Hierbei mögen wachsende φ einer Durchlaufung des $SK1$ im positiven Sinne entsprechen.

Satz 14: *Durch mehrfache Anwendung von t und von Operationen aus $\mathfrak{L}$ läßt sich jedes Zahlenpaartripel $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ so reduzieren, daß jedes Paar wenigstens eine Null enthält.*

Beweis: Durch Anwendung von b und c läßt sich erreichen, daß $m_1 \geqq m_2 \geqq m_3$ wird; durch hinreichend oft wiederholte Anwendung von $t_i^{\pm 1}$ kann man

$$|v_i| \leqq \frac{m_i}{2} \text{ machen } (i = 1, 2, 3).$$

1. Sei $m_1 > m_3$.

11. Für alle $i = 1, 2, 3$ sei $\frac{1}{2}(m_k + m_l - m_i) = \mu_i \geqq 0$.

Wir wenden a an; dann geht m_i in m_i' über, und aus der „Tafel", Fall 1, p. 20 folgt:

$$m_i' \leqq |v_k| + |v_l| \leqq \tfrac{1}{2}(m_k + m_l). \quad \text{Also wird speziell:}$$
$$m_1' \leqq \tfrac{1}{2}(m_2 + m_3) < m_1, \quad m_2' < m_1, \quad m_3' \leqq m_1.$$

Hierbei wird nur dann $m_3' = m_1$ sein können, wenn $m_1 = m_2$ ist. Wir haben durch diese Operation also erreicht, daß eine Zahl m_i weniger das Maximum m_1 erreicht als vorher; durch höchstens zweimalige Anwendung dieses Verfahrens kann also das Maximum der m_i herabgedrückt werden.

12. Sei $\frac{1}{2}(m_1 - m_2 - m_3) = \mu_i^* > 0$.

Dann ist notwendig $m_1 > m_2 \geqq m_3$. Wir wenden wieder a an und erhalten:

$$m_1' = 2\mu_1^* + |v_2| + |v_3|, \; m_2' \leqq |v_1| + |v_3|, \; m_3' \leqq |v_1| + |v_2|$$

nach „Tafel", Fall 2, p. 20/21. Also wird:

$m_1' \leqq 2\mu_1^* + \frac{1}{2}(m_2 + m_3) = m_1 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3) < m_1$, wenn nicht
$m_2 + m_3 = 0$, d. h. wenn nicht $m_2 = m_3 = 0$ ist. Weiter ist:
$m_2' \leqq \frac{1}{2}(m_1 + m_3) < m_1, \quad m_3' \leqq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) < m_1$.

In diesem Falle ist es uns also auch gelungen, das Maximum der m_i herabzudrücken.

Ist aber $m_2 = m_3 = 0$, was ad 11 unmöglich war, und ist wenigstens $v_1 \neq 0$, so läßt sich durch Anwendung von a erreichen, daß wenigstens zwei $m_i \neq 0$ sind; denn $m_1' \neq 0$, und weiter ist in diesem Falle: $m_2' = |v_1| + |v_3| \neq 0$, $m_3' = |v_1| + |v_2| \neq 0$, da $\mu_2 = \mu_3 = 0$ (cf. p. 14 und 15). Dann kann man durch geeignete Operationen das Maximum der m_i herabdrücken [1]).

2. Sei $m_1 = m_2 = m_3 \neq 0$. Notwendig sind dann alle

$$\mu_i = \tfrac{1}{2} m_1 = \tfrac{1}{2} m_2 = \tfrac{1}{2} m_3 > 0.$$

21. Für wenigstens ein i gelte $|v_i| < \frac{m_i}{2}$. Dann wenden wir a an und erhalten nach „Tafel" Fall 1, p. 20:

$$m_i' \leqq \tfrac{1}{2}(|v_k| + |v_l|) \leqq \tfrac{1}{2}(m_k + m_l) = m_1$$
$$m_k' \leqq \tfrac{1}{2}(|v_l| + |v_i|) < \tfrac{1}{2}(m_l + m_i) = m_1$$
$$m_l' \leqq \tfrac{1}{2}(|v_k| + |v_i|) < \tfrac{1}{2}(m_k + m_i) = m_1.$$

Es gibt also unter den m_i' zwei, die das Maximum nicht erreichen; wir können jetzt wieder 1. anwenden.

22. Für alle $i = 1, 2, 3$ sei $|v_i| = \frac{m_i}{2}$. Dann kann man durch geeignete Anwendung der $t_i^{\pm 1}$ erreichen, daß $v_k = -v_l = v_i$ wird. Weiter ist $|v_i| = \mu_i = \mu_k = \mu_l$ für alle i. Wenden wir jetzt a an, so wird nach „Tafel" Fall 1, III, p. 20: $m_i' = 0$, $m_k' = 0$, $m_l' = |v_k + v_i| = m_1$; es erreichen also von den m_i zwei nicht mehr das Maximum, und wir können wieder 1. anwenden.

---

[1]) In jedem Falle sind die $m_i' \leqq m_1$ und überdies $m_2' < m_1, m_3' < m_1$, wir haben es also mit 11 oder dem 1. Teil von 12 zu tun.

Damit haben wir gesehen, daß sich in jedem Falle das Maximum der m_i herabdrücken läßt, bis in jedem Paar des Tripels wenigstens eine Null auftritt; dann haben die angewandten Operationen nicht mehr den gewünschten Erfolg, wie 12 zeigt, q. e. d.

Zusatz 1: *Die allgemeine Form der hier angewandten Operationen ist* $t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} t_3^{\tau_3} a$, *wo* τ_i *gewisse ganze Zahlen* $\gtreqless 0$ *sind*; *diese „Normalform" muß im Allgemeinen mehrfach angewandt werden.*

Zusatz 2: *Jedes Zahlenpaartripel läßt sich durch Anwendung von Torsionen t und Operationen aus* $\mathfrak{L}$ *auf eine der beiden Normalformen bringen*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2^* & 0 \\ \nu_1 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$$

Beweis: Auf Grund des Satzes 14 können wir jedes Zahlenpaartripel in eine solche Form bringen, daß in jeder Spalte eine Null steht. Durch Anwendung von b und c lassen sich dann alle noch vorhandenen Möglichkeiten auf die folgenden vier Formen bringen:

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2^* + m_3 & m_3 \\ \nu_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2^* & 0 \\ \nu_1 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den 1. Fall:

Ist $m_k + m_l - m_i \geqq 0$ für alle $i = 1, 2, 3$, so führt die Operation a unser

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

über (p. „Tafel", Fall 1, I, p. 20); ist aber $m_i - m_k - m_l > 0$ für ein i, so geht bei a

$$\begin{pmatrix} m_k & m_i & m_l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_i^* & 0 \\ m_l & 0 & m_k \end{pmatrix}$$

über nach „Tafel", Fall 2, I, p. 20/21.

Wir betrachten den 2. Fall:

Wird t_3 angewandt, so geht

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2^* + m_3 & m_3 \\ \nu_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2^* + m_3 & m_3 \\ \nu_1 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

über und dies geht durch Ausübung von a in

$$\begin{pmatrix} m_3 & 2\mu_2^* + \nu_1 + m_3 & \nu_1 \\ m_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über; hierauf wenden wir noch t_1^{-1} an, q. e. d.

Satz 15: *Die Abbildungstypengruppe* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{F}$ *wird durch a, b, c und t erzeugt* [1]).

Beweis: Sei irgendeine topologische Abbildung A von $\mathfrak{F}$ auf sich vorgelegt, bei der UKi in u_i, SKi in s_i ($i = 1, 2, 3$) übergeht. Können wir jetzt ein „Wort" B aus a, b, c, t kombinieren, das u_i in zu UKi, s_i in zu SKi homotope Kurven überführt, so folgt aus Satz 1 des § 1, daß AB^{-1} eine torsionslose Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf sich ist, da ja nach Satz 1 des Teils II, § 2, p. 106 homotope einfache Kurven auch isotop sind. Aus Satz 2 b folgt dann, daß sich AB^{-1} als Wort in a, b, c, also daß sich A als Wort in a, b, c, t darstellen läßt [2]).

Zunächst bringen wir das System der s_i ($i = 1, 2, 3$) auf *Dehn*sche Normalform, was auf Grund des Satzes 5a des Teils I, p. 246, des Zusatzes 1 zu Satz 1a des Teils II, p. 113 und des Zusatzes zu Satz 2, p. 114 des Teils II durch eine topologische Deformation von $\mathfrak{F}$

---

[1]) cf. *M. Dehn*, *l. c.*, *p.* 11/12. — Ferner: *J. Nielsen*, Hamb. Abhdlg. Bd. 3 (1924), S. 257.

[2]) Es ist $A\,B^{-1} = 1$ oder $= a^2$.

auf eine Weise möglich ist. Nach Zusatz 2 zu Satz 14 bringen wir dann das sich ergebende Zahlenpaartripel auf eine der beiden Normalformen; es kommt nur $\binom{0\,0\,0}{1\,1\,1}$ in Frage, da die SKi und damit die s_i jede für sich nicht zerlegende Kurven sind, die aber im ganzen $\mathfrak{F}$ in genau zwei Teile zerlegen. Damit ist jedes s_i in genau eine zu SKk homotope Kurve übergeführt; durch geeignete Anwendung von b, c läßt sich erreichen, daß s_i gerade in eine zu SKi homotope Kurve übergeht.

Hierbei geht das Kurvensystem u_1, u_3 in ein Kurvensystem über, dessen *Dehn*sche Zahlen $\binom{1\;\;2\;\;1}{\nu_1\;\nu_2\;\nu_3}$ sind, da die u_i mit den s_i je genau einen Punkt gemein haben. Durch Anwendung von t_i ($i = 1, 2, 3$) (cf. p. 21!) läßt sich dies in $\binom{1\,2\,1}{0\;\delta\;0}$ überführen, wo $\delta = 0$ oder $= 1$ ist, je nachdem ν_2 gerade oder ungerade ist. Wäre aber $\delta = 1$, so würde, wie leicht zu sehen ist, die zugehörige *Dehn*sche Normalform nur aus einer Kurve bestehen, was unmöglich ist. Also muß $\delta = 0$, d. h. u_1 in eine zu UK_1 und u_3 in eine zu UK_3 homotope Kurve übergeführt sein, da ja die s_i in zu SKi homotope Kurven übergegangen sind. Hierbei ist u_2 in eine Kurve u_2' übergegangen, deren *Dehn*sche Zahlen $\binom{1\;0\;1}{\nu_1\;\nu_2\;\nu_3}$ sind; die ν_i müssen aber Null sein, da u_2' weder mit $UK1$, noch mit $UK3$ Punkte gemein haben, d. h. auch u_2 ist in eine zu $UK2$ homotope Kurve übergegangen.

3. Die Gruppe der Torsionen.

Für $i = 1, 2, 3$ werde ebenso wie die Torsion t_i im $\mathfrak{d}_i$ die Torsion t_{3+i} im Drehring des UKi definiert. Da bei Ausübung von a auf $\mathfrak{F}$ der UKi in SKi und bei a^{-1} der SKi in UKi übergeht, so gilt

$$t_{3+i} = a\,t_i\,a^{-1} = a^{-1}\,t_i\,a,$$

da ja a^2 mit allen Elementen aus $\mathfrak{A}$ vertauschbar ist.

Sei $\mathfrak{T}_0$ die Gruppe der Torsionen in $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{T}_3$ die Gruppe der Torsionen in den Drehringen der UK. Dann ist $\mathfrak{T}_0[\mathfrak{T}_3]$ eine von den $t_i[t_{3+i}]$ ($i = 1, 2, 3$) erzeugte *Abel*sche Gruppe ohne weitere Relationen. Sei $\mathfrak{T}$ die Gruppe aller Torsionen von $\mathfrak{F}$. Dann wird $\mathfrak{T}$ von den t_j erzeugt ($j = 1, \ldots, 6$), enthält $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_3$ als Untergruppen; in $\mathfrak{T}$ gelten noch die Relationen

$$t_i\,t_{3+i} = t_{3+i}\,t_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

1. *Sei g irgendein Element aus $\mathfrak{L}$ in Normalform; dann gilt für alle ganzzahligen $n \gtreqless 0$, daß $g^{-1}t^n g$ ein Element aus $\mathfrak{T}$ ist.*

Da $t_1 = t$ ist und alle t_j ($j = 1, \ldots, 6$) Transformierte von t sind, so genügt es zu zeigen, daß jedes durch ein Element aus $\mathfrak{L}$ transformierte Element aus $\mathfrak{T}$ wieder ein Element aus $\mathfrak{T}$ ist.

Es ist aber $a^{-1}t_i a = t_{i+3}$, wo der Index mod 6 zu reduzieren ist; dies folgt aus der Vertauschbarkeit von a^2. Weiter ist $b^{-1}t_i b = t_{i+1}^{-1}$, $b^{-1}t_{3+i}b = t_{3+(i+1)}^{-1}$, wo $i + 1 \bmod 3$ zu reduzieren ist.

Schließlich ist $\quad c\,t_i\,c = t_i^{-1}$ für $i = 2$

und $\quad c\,t_i\,c = t_k^{-1}$ für $i \neq 2,\ k \neq 2,\ i \neq k,$

ebenso ist $c\,t_{3+2}\,c = t_{3+2}^{-1}$

und $c\,t_{3+1}\,c = t_{3+3}^{-1}$, $c\,t_{3+3}\,c = t_{3+1}^{-1}$, q. e. d.

2. *Jedes „Wort" aus $\mathfrak{A}$ läßt sich auf die Form: Element aus $\mathfrak{T}$ mal Element aus $\mathfrak{L}$ bringen.*

Sei nämlich irgendein Wort w aus $\mathfrak{A}$ gegeben. Dann ist $w = t^{n_1} w_1$, wo $n_1 \gtreqless 0$ und ganz ist, während w_1 mit einem Element g_1 aus $\mathfrak{L}$ beginnt. Also ist $w_1 = g_1 t^{n_2} w_2$, wo $n_2 \neq 0$ und ganz ist, d. h. $w_1 = g_1 t^{n_2} g_1^{-1} (g_1 w_2) = t' w^{(1)}$, wo t' wegen 1. ein Element aus $\mathfrak{T}$ und $w^{(1)}$ ein Wort aus $\mathfrak{A}$ ist, das wenigstens eine t-Potenz weniger als w enthält. Mit $w^{(1)}$ verfahren wir ebenso, bis wir w erschöpft und auf die gesuchte Normalform gebracht haben.

3. *Seien $t^{(i)}$ Elemente aus $\mathfrak{T}_0$; dann läßt sich jedes Wort aus $\mathfrak{A}$ auf die Form $\prod_{i=1}^{m} t^{(i)} a \times g$ bringen, wo g ein Element aus $\mathfrak{L}$ ist.*

Sind $t^{(i),3}$ Elemente aus $\mathfrak{T}_3$, so läßt sich jedes Wort aus $\mathfrak{T}$ auf die Form $\prod_{i=1}^{m} t^{(i)} t^{(i),3}$ bringen, woraus wegen 1., 2. auch 3. folgt (cf. Zusatz 1 des Satzes 14!).

Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen.

Von *A. Plessner* in Gießen.

§ 1.

Das unbestimmte Integral $F(x) = \int_x f(u)\,du$ einer in dem Intervall Δ im *Lebesgue*schen Sinne integrierbaren Funktion $f(x)$ läßt sich als eine totalstetige (absolutstetige) Funktion charakterisieren, d. h. man kann die Funktion $F(x)$ auch durch folgende Eigenschaft definieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein solches $\delta > 0$, daß für jede endliche Menge von zueinander fremden Intervallen $(x_\varkappa, x'_\varkappa)$ aus Δ mit der Bedingung $\sum_\varkappa (x'_\varkappa - x_\varkappa) < \delta$ $\sum_\varkappa |F(x'_\varkappa) - F(x_\varkappa)| < \varepsilon$ ist. Die totalstetigen Funktionen sind zugleich von beschränkter Variation, und die Frage, durch welche Zusatzeigenschaften die totalstetigen Funktionen aus der Gesamtheit aller Funktionen von beschränkter Variation ausgesondert werden können, ist vielfach behandelt worden [1]). Im folgenden wird eine von den bisher bekannten verschiedene Zusatzbedingung angegeben werden (Satz I), vorerst sollen aber einige Begriffsbildungen über Funktionen beschränkter Variation zusammengestellt werden.

Die Gesamtheit aller Funktionen $F(x)$ von beschränkter Variation im Intervall Δ [2]) betrachten wir als einen linearen metrischen Raum $\mathfrak{F}$ [3]), indem wir jeder Funktion $F(x)$ als Maß $\varrho(F)$ die totale Variation im Intervall Δ zuordnen [4]):

$$\varrho(F) = \int_\Delta |dF|.$$

Der Abstand zweier Funktionen aus $\mathfrak{F}$, F_1 und F_2, ist dann durch [4])

$$\varrho(F_1, F_2) = \varrho(F_1 - F_2) = \int_\Delta |d(F_1 - F_2)|$$

gegeben, und dementsprechend sagen wir von einer Funktionenfolge $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, sie konvergiere gegen F, in Zeichen $F_n \rightrightarrows F$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(F - F_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta |d(F - F_n)| = 0 \quad \text{ist [5]).}$$

Hilfssatz 1: Sind die Glieder der Folge $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ totalstetig und ist außerdem $F_n \rightrightarrows F$, so ist auch F totalstetig.

---

[1]) Vgl. die Darstellung in *L. Schlesinger* und *A. Plessner*, *Lebesgue*sche Integrale und *Fourier*sche Reihen (1926), im folgenden zitiert mit *S. u. P.*, S. 141—164 insb. S. 157—163, und die dort auf S. 150 gemachten Literaturangaben; hierzu noch *Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen (1918), S. 563—590; *Vitali*, Rend. Circ. Palermo 46 (1922), S. 388; *Banach*, Fundam. Math. 7 (1925), S. 226.

[2]) Die Funktionen $F(x)$ sollen zunächst nur im offenen Intervall definiert sein.

[3]) Über den Begriff des linearen metrischen Raumes vgl. *Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), S. 3 u. f.

[4]) Für die totale Variation von $F(x)$ im Intervall Δ schreiben wir in Anlehnung an den *Stieltjes*schen Integralbegriff $\int_\Delta |d\,F(x)|$.

[5]) Der Raum $\mathfrak{F}$ ist vollständig, vgl. *Hahn*, loc. cit. [3]), S. 74—76. Im Folgenden wird von dieser Eigenschaft von $\mathfrak{F}$ kein Gebrauch gemacht.

Man bestimme nämlich zu einem $\varepsilon > 0$ ein m so, daß

$$\varrho(F - F_m) = \int_{\Delta} |d(F - F_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird; nun ist F_m nach Voraussetzung totalstetig, man kann also ein m so bestimmen, daß für jede Menge von zueinander fremden Intervallen $(x_\varkappa, x'_\varkappa)$ aus Δ

$$\sum_{\varkappa} |F_m(x'_\varkappa) - F_m(x_\varkappa)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird, wenn nur

$$\sum_{\varkappa}(x'_\varkappa - x_\varkappa) < \delta$$

vorausgesetzt wird. Dann ist aber

$$\sum_{\varkappa} |F(x'_\varkappa) - F(x_\varkappa)| \leqq \sum_{\varkappa} |F_m(x'_\varkappa) - F_m(x_\varkappa)| + \sum_{\varkappa} |F(x'_\varkappa) - F_m(x'_\varkappa) - (F(x_\varkappa) - F_m(x_\varkappa))|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\Delta} |d(F - F_m)| < \varepsilon,$$

also $F(x)$ totalstetig.

Sind a und b die Endpunkte des Intervalls $\Delta = (a, b)$, so kann man die Funktion $F(x)$ durch die Festsetzungen [6])

$$F(a) = \lim_{x \to a} F(x), \qquad F(b) = \lim_{x \to b} F(x)$$

$$F(x) = F(a) \text{ für } x < a, \quad F(x) = b \text{ für } x > b$$

zu einer für alle reellen x definierten Funktion erweitern. Nimmt die Funktion $F(x)$ in a und b gleiche Werte an, ist also $F(a) = F(b)$, so läßt sich eine Erweiterung für alle x auch so vornehmen, daß man $F(x)$ zu einer periodischen Funktion mit der Periode $b - a$ macht, indem man allgemein setzt

$$F(x + b - a) = F(x).$$

Wir sprechen dann vom *periodischen Fall.* Nach jeder dieser beiden Erweiterungen hat also auch die Funktion $F(x + h)$ von x für jedes h einen Sinn, und gehört, wenn man sie nur in Δ betrachtet, zu $\mathfrak{F}$. Der Ausdruck [7])

$$\omega(h) = \int_{\Delta} |d_x(F(x + h) - F(x))|$$

ist also in beiden Fällen vollständig definiert und kann als eine Art „Stetigkeitsmaß" für $F(x)$ betrachtet werden, dessen Brauchbarkeit allerdings noch von der Bedingung

$$\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$$

abhängt. Es wird sich aber ergeben, daß die Funktionen $F(x)$, welche diese Bedingung erfüllen, also gewissermaßen die ω-stetigen Funktionen, die Klasse der totalstetigen Funktionen bilden, was wir noch als Satz formulieren wollen.

Satz I: *Damit die im Intervall Δ definierte Funktion $F(x)$ dort totalstetig sei, ist notwendig und hinreichend:*

1. *$F(x)$ ist in Δ von beschränkter Variation;*
2. *Es ist* $\lim_{h \to 0} \omega(h) = \lim_{h \to 0} \int_{\Delta} |d_x(F(x + h) - F(x))| = 0,$

---

[6]) Die Grenzwerte existieren, weil eine Funktion beschränkter Variation als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

[7]) Der Index x bei d_x soll nur andeuten, das die totale Variation in bezug auf die Veränderliche x gebildet wird.

wobei $F(x)$ außerhalb des Intervalles Δ die zwei bei der Definition von $\omega(h)$ angegebenen Bedeutungen haben kann.

Beweis: α) *Die Bedingungen sind notwendig.*

Ist nämlich die Funktion $F(x)$ totalstetig, so ist sie auch von beschränkter Variation und läßt sich überdies in der Form $F(x) = \int_{\cdot}^{x} f(u)\,du$ darstellen, wo $f(x)$ L-integrierbar ist. Dann ist aber [8])

$$\omega(h) = \int_{\Delta} |d_x(F(x+h) - F(x))| = \int_{\Delta} |f(x+h) - f(x)|\,dx,$$

und somit $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$ [9]).

β) *Die Bedingungen sind hinreichend.*

Wir zeigen dies zunächst für den *periodischen Fall* und setzen hier somit 1. und 2. (mit der entsprechenden Erweiterung von $F(x)$) als erfüllt voraus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir noch die Annahme $b - a = 2\pi$ machen. Für die ersten arithmetischen Mittel $\sigma_n(x)$ der *Fourier*schen Reihe von $F(x)$ (*Fejér*sche Polynome) erhalten wir:

$$\sigma_n(x) - F(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x+u) - F(x)) \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}}\,du,$$

und durch Bildung der totalen Variation:

$$\int_{\Delta} |d(\sigma_n(x) - F(x))| \leqq \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(u) \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 du.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{u\to 0} \omega(u) = 0$ ist, so liegt hier der klassische Fall des *Fejér*schen Theorems [10]) vor, das rechts stehende Integral strebt mit $n \to \infty$ gegen 0, und es ist also:

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows F(x).$$

Nun sind die $\sigma_n(x)$ als trigonometrische Polynome totalstetig, und somit gilt nach dem Hilfssatz 1 dasselbe von $F(x)$, womit der Satz I für den periodischen Fall bewiesen ist.

Der Beweis von β) für den nichtperiodischen Fall läßt sich leicht auf den schon erledigten zurückführen. Zu diesem Zweck seien a', a'', b', b'' so gewählt, daß $a'' < a' < a < b < b' < b''$ ist. Wir definieren nun eine periodische Hilfsfunktion $F_1(x)$ in folgender Weise:

In $\Delta'' = (a'', b'')$ durch die Festsetzungen: $F_1(x) = F(x)$ für $a \leqq x \leqq b$, $F_1(x) = F(a)$ für $a' \leqq x \leqq a$, $F_1(x) = F(b)$ für $b \leqq x \leqq b'$, $F_1(a'') = F_1(b'') = 0$, $F_1(x)$ eine lineare Funktion in den Intervallen $a'' \leqq x \leqq a'$ und $b' \leqq x \leqq b''$; für alle anderen x durch die Beziehung: $F_1(x + b'' - a'') = F_1(x)$.

Es ist dann, wenn h genügend klein ist,

$$\int_{\Delta''} |d\,(F_1(x+h) - F_1(x))| = \int_{\Delta} |d(F(x+h) - F(x))|$$
$$+ \int_{a''}^{a} |d(F_1(x+h) - F_1(x))| + \int_{b}^{b''} |d(F_1(x+h) - F_1(x))|,$$

---

[8]) Vgl. *S.* u. *P.*, S. 164.

[9]) Vgl. *Lebesgue*, Leçons sur les séries trigonométriques (1906), S. 15, oder *S.* u. *P.*, S. 194—195.

[10]) *Fejér*, Math. Ann. 58 (1904).

und von den drei Integralen auf der rechten Seite hat das erste nach Voraussetzung den Grenzwert Null, wenn $h \to 0$, und dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, von den beiden anderen Integralen. Denn außerhalb der Umgebung von a und b handelt es sich höchstens um lineare Funktionen, und in a oder b hat man nur den Satz anzuwenden, daß in einem Stetigkeitspunkt von $F_1(x)$ auch die totale Variation stetig ist [11]). Es verschwindet also auch das Integral auf der linken Seite für $h \to 0$, nach dem vorher Bewiesenen ist daher $F_1(x)$ und somit auch $F(x)$ totalstetig, womit der Beweis zu Ende geführt ist.

§ 2.

Vom Begriff der ω-Stetigkeit [12]) werden wir noch zwei Anwendungen machen. Die erste ergibt den Beweis einer Verschärfung des *Riemann-Lebesgue*schen Lemmas [13]) in der Theorie der *Fourier*schen Reihen, die bei Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz der *Fourier*schen Reihe und verwandter Fragen von Bedeutung ist.

Satz II: *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle reellen x definierten und periodischen Funktionen mit der Periode 2π. Von diesen sei*

a) [14]) *$f(x)$ L-integrierbar, $g(x)$ meßbar und beschränkt, oder*

b) *$f(x)$ und $|f(x)|^p$ L-integrierbar, $g(x)$ und $|g(x)|^q$ L-integrierbar und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Es ist dann

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \lambda)\, g(x)\, e^{i\nu x}\, dx = 0,$$

und zwar gleichmäßig in λ.

Wir werden den Satz II einer allgemeineren Aussage unterordnen, zu deren Formulierung wir eine neue Begriffsbildung benötigen. Wir sagen von einer Menge, die aus periodischen (mit der Periode 2π) und L-integrierbaren Funktionen $\varphi(x, \lambda)$ von x besteht und von einem Parameter λ abhängt, sie sei in bezug auf λ *gleichmäßig ω-stetig*, wenn

$$\omega_\lambda(h) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x + h, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\ dx$$

gleichmäßig in λ mit $h \to 0$ gegen Null konvergiert.

Satz III: *Ist die Funktionenmenge $\varphi(x, \lambda)$ (in dem oben definierten Sinne) in bezug auf λ gleichmäßig ω-stetig, so gilt*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, \lambda)\, e^{i\nu x}\, dx = 0$$

und zwar gleichmäßig in λ.

Es ist nämlich, wenn man in das Integral $x + \frac{\pi}{\nu}$ statt x einsetzt und dann addiert:

---

[11]) Vgl. *S.* u. *P.*, S. 150.

[12]) Wir betrachten im § 2 das Stetigkeitsmaß nicht als zum totalstetigen $F(x)$ sondern als zu $F'(x) = f(x)$ gehörig (vgl. den Beweis von α) im Satz I), was wegen dem umkehrbar-eindeutigen Entsprechen von $F(x)$ und $f(x)$ gestattet ist.

[13]) Vgl. *Hilb* und *M. Riesz*, Enzykl. Math. Wiss. II C 10, S. 1192, *S.* u. *P.*, S. 193.

[14]) Für den Fall a) vgl. auch *Hobson*, The Theory of Functions of a real variable and the Theory of Fouriers series, 2nd ed., vol. II (1926), S. 535. Offenbar kann man in a) $f(x)$ und $g(x)$ vertauschen, wie man direkt oder durch Einführung der neuen Integrationsveränderlichen $y = x + \lambda$ ohne weiteres einsieht.

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x,\lambda)\, e^{i\nu x}\, dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi(x,\lambda) - \varphi\left(x+\frac{\pi}{\nu},\lambda\right)\right) e^{i\nu x}\, dx\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(x,\lambda) - \varphi\left(x+\frac{\pi}{\nu},\lambda\right)\right| dx = \frac{1}{2}\,\omega_\lambda\left(\frac{\pi}{\nu}\right),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Zum Nachweis des Satzes II ist es somit ausreichend, die Gültigkeit des folgenden Hilfssatzes zu zeigen:

Hilfssatz 2: Haben $f(x)$ und $g(x)$ die im Satz II angegebene Bedeutung, so ist die Funktionenmenge $\varphi(x,\lambda) = f(x+\lambda)g(x)$ in bezug auf λ gleichmäßig ω-stetig.

Die Funktionen $f(x+\lambda)g(x)$ sind periodisch und auch integrierbar für jedes λ [15]). Um noch die gleichmäßige Stetigkeit zu zeigen, schreiben wir

$$\varphi(x+h,\lambda) - \varphi(x,\lambda) = g(x+h)(f(x+h+\lambda) - f(x+\lambda)) + f(x+\lambda)(g(x+h) - g(x))$$

und behandeln die beiden Fälle a) und b) des Satzes II getrennt.

Im Fall a) sei $|g(x)| \leqq M$; dann ist

$$\omega_\lambda(h) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h,\lambda) - \varphi(x,\lambda)|\, dx \leqq M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\lambda)|\,|g(x+h) - g(x)|\, dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite konvergiert mit $h \to 0$ gegen Null [9]) unabhängig von λ; es bleibt also nur die gleichmäßige Konvergenz des zweiten Integrals zu zeigen. Setzt man nun $f_N(x) = f(x)$, wenn $|f(x)| \leqq N$, $f_N(x) = N$, wenn $f(x) > N$, und $f_N(x) = -N$, wenn $f(x) < -N$, so ist $f_N(x)$ auch periodisch, und es ist [16])

$$|f_N(x)| \leqq N, \quad \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Es folgt jetzt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\lambda|\,|g(x+h) - g(x)|\, dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x+\lambda)|\,|g(x+h) - g(x)|\, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\lambda) - f_N(x+\lambda)|\,|g(x+h) - g(x)|\, dx \leqq N\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+h) - g(x)|\, dx$$

$$+ 2M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|\, dx.$$

Wählt man zunächst N fest, aber so groß, daß das letzte Integral kleiner als $\frac{\varepsilon}{4M}$ ist, so kann man nachträglich ein $\delta(N)$ finden, so daß auch das vorletzte Integral für alle $|h| < \delta(N)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2N}$ wird. Das Integral links ist hiermit kleiner als ε abgeschätzt, und zwar unabhängig von λ, womit die gleichmäßige Konvergenz dieses Integrals gegen Null nachgewiesen und der Beweis des Hilfssatzes im Falle a) zu Ende geführt ist [17]).

---

[15]) Vgl. *F. Riesz*, Math. Ann. 69 (1910), S. 449 u. f.

[16]) Vgl. *S.* u. *P.*, S. 96.

[17]) Es gilt hier dieselbe Bemerkung über die Vertauschung von $f(x)$ und $g(x)$ wie in der Fußnote [14]).

Im Falle b) setzen wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx = N^p, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q\,dx = M^q$$

und erhalten durch Anwendung der *Hölder*schen Ungleichung [15])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h,\lambda) - \varphi(x,\lambda)|\,dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+h)|\,|f(x+h+\lambda) - f(x+\lambda)|\,dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\lambda)|\,|g(x+h) - g(x)|\,dx \leqq M\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ N\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+h) - g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Die Glieder, mit denen M und N multipliziert sind, stellen das Analogon des ω-Stetigkeitsmaßes für diejenigen Funktionen dar, welche samt ihrer p-ten bzw. q-ten Potenz integrierbar sind. In derselben Weise wie für $p = 1$ [9]) läßt sich auch für $p > 1$ zeigen [18]), daß dieses Stetigkeitsmaß mit $h \to 0$ gegen Null konvergiert, womit auch im Falle b) die gleichmäßige ω-Stetigkeit von $\varphi(x, \lambda) = f(x + \lambda)\,g(x)$ und der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Eine analoge Verschärfung, wie beim *Riemann-Lebesgue*schen Lemma, kann man mittels des Begriffes der gleichmäßigen ω-Stetigkeit auch bei anderen Sätzen auf einfache Weise erzielen. Es sei $K(x, n)$ für jedes n eine beschränkte, meßbare und periodische (mit der Periode 2π) [19]) Funktion von x. Außerdem sei

1. $K(x, n) \geqq 0$ für alle x und n,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\xi}^{\eta} K(x, n)\,dx = 0$, wenn das abgeschlossene Intervall (ξ, η) den Punkt $x = 0$ nicht enthält,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} K(x, n)\,dx = 1$.

Unter $\varphi(x, \lambda)$ verstehen wir wieder eine in bezug auf λ gleichmäßig ω-stetige Funktionsmenge, von der wir noch voraussetzen, daß sie außerdem noch der Beschränktheitsbedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x, \lambda)|\,dx < N \quad (N \text{ eine von } \lambda \text{ unabhängige Konstante})$$

genügt. Unter diesen Voraussetzungen für $\varphi(x, \lambda)$ und $K(x, n)$ gilt der

Satz IV: *Wird* $\tau_n(x, \lambda)$ *durch*

$$\tau_n(x, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u, \lambda)\,K(u - x, n)\,du$$

definiert, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x, \lambda) - \tau_n(x, \lambda)|\,dx = 0,$$

---

[18]) Für $p = 2$ vgl. *S.* u. *P.*, S. 214—215.

[19]) Die letzte Voraussetzung ist nicht wesentlich, und sie wurde nur gemacht, um das Folgende übersichtlicher zu gestalten.

und zwar gleichmäßig in λ. Insbesondere kann $\varphi(x, \lambda) = f(x + \lambda)\, g(x)$ gesetzt werden, wo $f(x)$ und $g(x)$ die im Satz II angegebene Bedeutung haben.

Es ist nämlich

$$\tau_n(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(x + u, \lambda) - \varphi(x, \lambda))\, K(u, n)\, du + \varphi(x, \lambda)\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(u, n)\, du - 1 \right),$$

und daher

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x, \lambda) - \tau_n(x, \lambda)|\, dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\lambda(u)\, K(u, n)\, du + N \left| \int_{-\pi}^{\pi} K(u, n)\, du - 1 \right|.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{u \to 0} \omega_\lambda(u) = 0$ gleichmäßig in λ ist, und außerdem $|\omega_\lambda(u)| < 2N$ ist, so folgt leicht in bekannter Weise die gleichmäßige Konvergenz des ersten Integrals auf der rechten Seite gegen Null [20]), und somit auch der Satz IV für allgemeines $\varphi(x, \lambda)$. Für $\varphi(x, \lambda) = f(x + \lambda)\, g(x)$ ist nach dem Hilfssatz 2 noch zu zeigen, daß

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x + \lambda)\, g(x)|\, dx < N.$$

Dies ergeben aber die Ungleichungen: im Falle a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x + \lambda)|\, |g(x)|\, dx \leqq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx\,,$$

im Falle b) [15])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x + \lambda)\, g(x)|\, dx \leqq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Setzt man $K(x, n) = \dfrac{1}{2\pi n} \left(\dfrac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$ bzw. $K(x, n) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x}$, $r = 1 - \dfrac{1}{n}$,

so sind die $\tau_n(x, \lambda)$ bzw. $\tau_{\frac{1}{1-r}}(x, \lambda) = \tau(r, x, \lambda)$ die *Fejér*schen bzw. *Poisson*schen Mittel der *Fourier*schen Reihe von $\varphi(x, \lambda)$. Der Satz IV gibt dann eine Verschärfung (im Sinne gleichmäßiger Konvergenz) bekannter Sätze von *Steinhaus* und *Groß* [21]).

---

[20]) Vgl. z. B. *Lebesgue*, Ann. Toulouse (3) 1 (1909), S. 70.

[21]) *Steinhaus*, Krak. Abhandl. 56 (1916), S. 176. *Groß*, Sitz.-Ber. Wien. Akad. IIa, 124 (1915), S. 1017.

Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie.

Von *M. Herzberger* in Jena.

In meiner Arbeit in Band 159, Heft 1 ds. Journals: „Untersuchungen über die Eigenschaften erster Ordnung von reellen Strahlensystemen" wurde der Begriff des Rotationswinkels bei Strahlenkongruenzen eingeführt, und mit seiner Hilfe die Gleichungen für die Größen erster Ordnung vereinfacht. An dieser Stelle wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieses Winkels einen leichten Überblick über die in einer Kongruenz enthaltenen Regelflächen bekommt.

Um zu zeigen, daß es sich auch hier um eine folgerichtige Weiterentwicklung von Ideen handelt, die für Regelflächen bekannt sind, seien die hierauf bezüglichen Tatsachen kurz angegeben.

Die Eigenschaften erster Ordnung einer Regelfläche längs eines Strahls hängen ab

1. von der Lage des kaustischen Punktes,
2. von der in obiger Arbeit „ν" genannten Größe, dem sogenannten Drall.

Sei r der Abstand eines Punktes des Ausgangsstrahls vom zugehörigen kaustischen Punkt, dann besteht die Gleichung

$$\nu = r \operatorname{tg} \varphi. \tag{1}$$

Hierbei ist φ (der in obiger Arbeit Drehungswinkel genannt wurde) der Winkel, den die Tangentialebene im Ausgangspunkt gegen ihre Grenzlage im Unendlichen bildet.

Sei $\nu \neq 0$, dann nimmt φ, wie aus Gleichung (1) folgt, jeden Wert zwischen $\mp \frac{\pi}{2}$ ein- und nur einmal ein. φ verschwindet nur im Unendlichen, φ wird $= \mp \frac{\pi}{2}$ im Punkt $r = 0$, d. h. im Striktionspunkt. Je größer ν ist, umso schneller dreht sich die Tangentialebene beim Fortschreiten längs unseres Strahls.

Ist $\nu = 0$, so wird auch $\varphi = 0$, es gibt eine konstante Tangentialebene an die Regelfläche längs dieses Strahls, die Regelfläche ist entlang diesem Strahl abwickelbar.

Ich werde zeigen, daß auch für jede Kongruenz drei charakteristische Größen existieren, die durch eine Gleichung der Form

$$N = M \operatorname{tg} \psi \tag{2}$$

verbunden sind, die zusammen mit der sogenannten astigmatischen Differenz D ein Strahlensystem vollständig charakterisieren. Hierin ist M die Entfernung eines beliebigen Strahlenpunktes vom sogenannten Mittelpunkt, ψ ist gerade der in obiger Arbeit eingeführte Rotationswinkel, und N können wir, wie später zu zeigen ist, als mittleren Drall der Kongruenz bezeichnen.

Ist nun $N \neq 0$, so folgt wie oben, daß ψ längs des Strahls alle Werte zwischen $\mp \frac{\pi}{2}$ ein- und nur einmal annimmt, im endlichen nirgends verschwindet, und gerade im sogenannten Mittelpunkt ($M = 0$) den Wert $\mp \frac{\pi}{2}$ annimmt.

Ist $N = 0$, so ist $\psi \equiv 0$. Dieser ausgezeichnete Fall tritt dann und nur dann ein, wenn unsere Kongruenz entlang dem herausgegriffenen Strahl die Eigenschaften einer Normalenkongruenz hat.

Wir werden die obigen Behauptungen im Folgenden beweisen.

Zuerst einige Definitionen. Jeder Kongruenz

$$\mathfrak{a}(u, v) + \lambda\mathfrak{s}(u, v)$$

ist ein Flächenstück auf der Einheitskugel zugeordnet, das man erhält, wenn man alle Vektoren $\mathfrak{s}(u, v)$ von einem festen Punkte aus abträgt. Man nennt diese Punktmannigfaltigkeit das sphärische Bild der Kongruenz. Einem Strahl entspricht hierbei ein Punkt, einer ihn enthaltenden Regelfläche eine Kurve auf der Einheitskugel.

Wir wollen zwei Regelflächen konjugiert nennen, wenn ihre sphärischen Bilder sich senkrecht schneiden. Die Bedingung dafür lautet

$$\mathfrak{s}_u \cdot \mathfrak{s}_v = (\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_v) \cdot (\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_v) = 0. \quad (3)$$ [1])

Wir wollen zwei Regelflächen orthogonal in einem Punkt nennen, wenn die Tangentialebenen an beide Regelflächen in diesem Punkte aufeinander senkrecht stehen. Die Bedingung dafür lautet

$$(\mathfrak{a}_u \times \mathfrak{s}) \cdot (\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{s}) = 0. \quad (4)$$

Die Koordinatenwahl in der zitierten Arbeit beruht also darauf, daß die Normalkoordinaten Regelflächen bestimmen, die gleichzeitig konjugiert, als auch in bezug auf den Ausgangspunkt orthogonal sind. Das ist im allgemeinen (der Ausnahmefall muß gesondert behandelt werden) nur auf eine Weise möglich. Es ergab sich, daß bei obiger Wahl die Koordinatenregelflächen im Ausgangspunkt den gleichen Drehungswinkel hatten. Dieser gemeinsame Drehungswinkel ψ ist nun die von uns zu untersuchende Größe.

Sei nun α der Winkel, den das sphärische Bild einer beliebigen Regelfläche mit dem Bild der ersten Koordinatenregelfläche bildet, so ergibt sich als Entfernung des Striktionspunktes und als Drall für die erstere nach den ersten beiden Gleichungen aus Formel (6) der zitierten Arbeit:

$$\begin{aligned} r &= M - \frac{d}{\cos\psi}\cos(2\alpha - \psi) \\ v &= N - \frac{d}{\cos\psi}\sin(2\alpha - \psi), \end{aligned} \quad (5)$$

wo

$$N = M \operatorname{tg}\psi \quad (6)$$

ist.

Aus Gleichung (5) ergibt sich, wenn wir statt α: $\alpha + \frac{\pi}{2}$ einsetzen, also die Größen für die konjugierte Regelfläche betrachten:

Die Striktionspunkte konjugierter Regelflächen liegen symmetrisch zum Mittelpunkt, dessen Entfernung vom Ausgangspunkt M sei; also

$$r_{1,2} = M \mp \frac{d}{\cos\psi}\cos(2\alpha - \psi), \quad (7)$$

außerdem: Konjugierte Regelflächen haben denselben mittleren Drall N:

$$v_{1,2} = N \mp \frac{d}{\cos\psi}\sin(2\alpha - \psi). \quad (8)$$

---

[1]) Das Zeichen $\times$ zwischen zwei Vektoren soll das Vektorprodukt charakterisieren.

Analog kann man aus den letzten Gleichungen von C folgern, daß folgender Satz gilt:

Orthogonale Flächen haben stets dieselbe mittlere Krümmung und dieselbe mittlere Windung.

Unter den konjugierten Regelflächen sind besonders ausgezeichnet die Grenzregelflächen. Sie sind gegeben durch

$$a_1 = \frac{\psi}{2}, \quad a_2 = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}; \tag{9}$$

für sie gewinnt r seinen größten bzw. kleinsten Wert

$$\begin{aligned} r_1 &= M - \frac{d}{\cos\psi} = M - D \\ r_2 &= M + \frac{d}{\cos\psi} = M + D. \end{aligned} \tag{10}$$

Den durch (10) eingeführten Wert D bezeichnet man als die astigmatische Differenz der Regelfläche. Die kaustischen Punkte aller in unserer Kongruenz enthaltenen Regelflächen liegen alle innerhalb einer Strecke von der Länge $2D$.

N ist der Drall der beiden Grenzregelflächen, der mittlere Drall aller konjugierten Regelflächen. Wir können nun auch den Winkel A von dem sphärischen Bilde der Grenzflächen aus zählen. Wir setzen also

$$2A = 2a - \psi \tag{11}$$

und finden

$$\begin{aligned} r &= M - D\cos 2A \\ \nu &= N - D\sin 2A. \end{aligned} \tag{12}$$

In Gleichung (12) sind alle Größen auf ein Koordinatensystem bezogen, das nicht mehr sich beim Übergang zu einem anderen Punkt ändert. A ist der Winkel des sphärischen Bildes der untersuchten Regelfläche mit dem sphärischen Bild der Grenzregelfläche. D ist die Entfernung Grenzpunkt—Mittelpunkt, die sogenannte astigmatische Differenz, M ist die Entfernung Ausgangspunkt—Mittelpunkt und

$$N = M \operatorname{tg}\psi \tag{12}$$

ist schließlich der Drall der beiden Grenzflächen. Aus Gleichung (11) finden wir für die Normalkoordinatenregelflächen

$$A_1 = -\frac{\psi}{2}, \qquad A_2 = -\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Aus der Gleichung (11), (12), (13) können wir nun folgende Schlüsse ziehen:

Betrachten wir ein beliebiges Paar konjugierter Regelflächen, die in bezug auf ihre Eigenschaften erster Ordnung längs unseres Strahls bestimmt sind durch die Winkel ihres sphärischen Bildes gegen das sphärische Bild der Grenzregelflächen,

$$A \text{ bzw. } A + \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Diese beiden Regelflächen haben den Drall

$$\nu = N \mp D\sin 2A. \tag{15}$$

Ihre Striktionspunkte liegen symmetrisch um den Mittelpunkt in der Entfernung

$$d = \mp D\cos 2A. \tag{16}$$

Sie sind Normalkoordinatenflächen, d. h. sie stehen aufeinander senkrecht im Punkt mit der Entfernung vom Mittelpunkt

(17) $$M = -N \operatorname{ctg} 2A$$

und haben den Rotationswinkel

(18) $$\psi = -2A.$$

Insbesondere folgt daraus für die Grenzflächen $A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$ aus (16), daß ihre Striktionspunkte vom Mittelpunkt den Maximalabstand $\pm D$ haben, und aus (17), daß die beiden Grenzregelflächen in keinem endlichen Punkt aufeinander senkrecht stehen.

Für alle übrigen konjugierten Regelflächen gibt es immer einen Punkt in dem sie aufeinander senkrecht stehen und dann dort Normalkoordinatenflächen bilden. Durch (16) und (17) wird übrigens eine interessante Beziehung zwischen den Punkten innerhalb der Grenzpunkte und allen Punkten der Geraden hergestellt.

Von Interesse sind noch die Regelflächen $A_1 = \frac{\pi}{4}$, $A_2 = \frac{3\pi}{4}$, deren Striktionspunkt im Mittelpunkt liegt, in dem sie aber gleichzeitig aufeinander senkrecht stehen. Ihr Drall ist der maximal auftretende Drall

(15) $$r_{1,2} = N \mp D.$$

Hier ist in Normalkoordinaten

(16) $$\begin{aligned} r &= -D \sin 2\alpha \\ \nu &= N - D \cos 2\alpha \end{aligned}$$

und $$\beta = -\alpha.$$

Die obigen Betrachtungen versagen allerdings für Normalkongruenzen; dort wird $N = 0$, d. h. die Grenzregelflächen sind längs unserem Strahl abwickelbar. Dann stehen bekanntlich die Grenzregelflächen längs des ganzen Hauptstrahls aufeinander senkrecht, sie sind also die gegebenen Koordinatenflächen. Zählen wir A wie oben von ihnen aus, so wird $d = D$ und aus Gleichung (5)

(17) $$\begin{aligned} r &= M - D \cos 2\alpha \\ \nu &= -D \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Der Rotationswinkel ψ verschwindet dann in allen Punkten identisch. Aus Formel (17) der zitierten Arbeit folgt dann

(18) $$\operatorname{tg} \beta = \frac{M + D}{M - D} \operatorname{tg} \alpha .$$

Wann sind zwei konjugierte Regelflächen orthogonal? Wenn aus $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ folgt $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$. Das ergibt

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{M - D}{M + D} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \left(\frac{M - D}{M + D}\right)^2 \operatorname{tg} \beta_2,$$

also $$M + D = \pm (M - D),$$

d. h.

(19) $$M = 0,$$

also: Alle konjugierten Regelflächen stehen bei einem Normalensystem im Mittelpunkt und nur im Mittelpunkt aufeinander senkrecht. Nur die Grenzregelflächen, die zugleich abwickelbar sind, sind längs des ganzen Strahls orthogonal.

Wir sehen also: Im Mittelpunkt eines Strahls führt die Bedingung, daß die Koordinatenregelflächen orthogonal und konjugiert sind, nicht notwendig, wie in jedem anderen Punkt, auf die Grenzregelflächen. Die Aufstellung der Normalgleichungen in der zitierten Arbeit müßte für diesen Fall etwas modifiziert werden, was aber ohne Mühe möglich ist.

Der Fall $D = 0$, den man auch aus (19) folgern kann, ist der Fall eines Nabelpunktes bei einer Fläche. Hier fallen alle Striktionspunkte zusammen. Ist das System ein Normalensystem, so sind alle Regelflächen längs des Strahls abwickelbar und alle konjugierten Regelflächen sind längs des ganzen Strahles orthogonal. Im Fall des Nichtnormalensystems ändert sich nichts, außer daß alle Regelflächen einen konstanten Drall N haben, und natürlich alle denselben Striktionspunkt besitzen. Man kann (in bezug auf die Eigenschaften erster Ordnung) hier sagen: Die unendlich dünne Kongruenz entsteht durch Drehen der unendlich dünnen Regelfläche mit gleichem Mittelpunkt und gleichem Drall um den Hauptstrahl.

Zur Theorie der Summengleichungen.

Von *Erik Svenson* in Riga.

Einleitung.

Als Summengleichung bezeichnet Horn [1]) eine Funktionalgleichung, die so wie die Volterrasche Integralgleichung gebaut ist. Nur steht an Stelle des Integrales eine Summe. Es steht nichts im Wege, den Namen Summengleichung auf jede Funktionalgleichung anzuwenden, die auf solch' eine Weise mit einer allgemeinen Integralgleichung verwandt ist. Hier soll das betreffende Analogon zur linearen Integralgleichung zweiter Art untersucht werden:

$$\varphi(s) - \lambda \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t = f(s).$$

Die Summe soll im allgemeinen eine abzählbar unendliche sein. $\varphi(s)$ soll die Gleichung identisch in s befriedigen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Eigenschaften der gegebenen Funktion zweier Argumente $k(s)_t$, des „Kernes", über den gewisse Voraussetzungen getroffen werden. Ein Kern dieser Art stellt einen Zwischenfall dar zwischen dem Kern eine Integralgleichung $k(s, t)$, in dessen Definitionsgebiet beide Argumente s und t stetig veränderlich sind, und einer Matrix k_{st}, deren Elemente nur für $s, t = 1, 2, 3 \ldots$ definiert sind. Hier soll s stetig veränderlich sein und t nur die Werte 1, 2, 3 . . . annehmen können.

Verwandte Funktionalgleichungen sind von Kneser [2]) und Hurwitz [3]) betrachtet worden. Kneser untersucht eine gemischte Integral- und Summengleichung, die er belastete Integralgleichung nennt, ähnlich Hurwitz. Bei beiden ist indessen die Summe stets eine endliche, und es zeigt sich, daß man durch eine passende Verallgemeinerung des Integralbegriffes die Theorie der linearen Integralgleichung zweiter Art direkt auf die belastete Integralgleichung übertragen kann [4]). Da stets ein Integral vorkommt, so ist das Definitionsgebiet des Kernes ein zweidimensionales, und erst wenn man das Hauptglied, das Integral, wegläßt, ergibt sich das andersartige Definitionsgebiet.

Im ersten Abschnitt sind einige Resultate und Formeln zusammengestellt, auf die sich das Spätere stützt. Als bekannt wird dabei die Arbeit von Hellinger „Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen" im Journ. f. r. u. ang. Math. Bd. 136 (1909) vorausgesetzt, weiterhin unter „Hlg." zitiert. Außer der kanonischen Darstellung einer quadratischen Form werden aber nur solche Angaben gemacht, die sich bei Hellinger und auch sonst in der einschlägigen Literatur, soweit ich sehe, nicht vorfinden. Das Hauptgewicht ist dabei auf den Begriff eines *vollständigen* Orthogonalsystems gelegt.

---

[1]) Horn, „Volterrasche Integralgleichung und Summengleichungen". dieses Journal Bd. 140 (1911).

[2]) Kneser „Belastete Integralgleichungen", Rend. d. Circ. math. di Palermo Bd. 37 (1914).

[3]) Hurwitz, „Note on mixed linear integral equations", Amer. Math. Soc. Bulletin (2) 18, und „Mixed linear integral equations of the first order", Amer. Math. Soc. Transactions 16 (1915).

[4]) Kneser, a. a. O. S. 191 f.

Im zweiten Abschnitt folgt die genaue Formulierung des Problems und die Zurückführung auf die Theorie der quadratischen Formen.

Im dritten und vierten Abschnitt werden weiter zwei sich ergebende und gegenseitig ergänzende Spezialfälle untersucht, die sich in völlig gleicher Weise behandeln lassen; die bis ins Einzelnste reichende Analogie zwischen den Eigenschaften der Eigenformen und der Eigendifferentialformen wird hervorgehoben und gezeigt, wie sie auch erhalten bleibt bei geeigneter Fortsetzung dieser Begriffe in das Gebiet des stetig veränderlichen Argumentes. Aus ihnen werden „Eigenfunktionen" und „Eigendifferentialfunktionen" des Kernes $k(s)_t$.

Im letzten Abschnitt wird der allgemeine Fall auf die beiden Spezialfälle zurückgeführt, und es werden die endgiltigen Resultate zusammengestellt.

Das sich hieraus ergebende Bild der Einordnung der Theorie der Summengleichung in die erwähnten Nachbargebiete, ist dieses, daß sie dem Wesen nach der Theorie der quadratischen Formen am nächsten steht, und in gewisser Hinsicht einer Verallgemeinerung gibt, daß aber äußerlich die Formeln den klassischen Formeln der Theorie der Integralgleichungen zweiter Art am ähnlichsten sind. Die Bedeutung einzelner Voraussetzungen, die dort getroffen werden, und mancher Resultate wird hierdurch von einer neuen Seite beleuchtet.

An dieser Stelle möchte ich noch meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor E. R. Neumann, Marburg, dessen Vorlesungen mich zu dieser Arbeit angeregt haben, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Riga, Juli 1927.

Erster Abschnitt.

Zusammenstellung von Resultaten aus der Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlicher.

§ 1. Die kanonische Darstellung einer quadratischen Form.

Eine beschränkte [1]) quadratische Form von unendlich vielen Veränderlichen $K(x, x) = \sum_{(s)}\sum_{(t)} k_{st} x_s x_t$, $s, t = 1, 2 \ldots$[2]), mit der Schranke M läßt sich durch ihre Eigenwerte λ_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$, die zugehörigen Eigenformen $L^{(\mu)}(x) = \sum_{(s)} l_s^{(\mu)} x_s$ und ihre Eigendifferentialformen $d\mathsf{P}^{(\nu)}(\lambda, x) = \sum_{(s)} \varrho_s^{(\nu)}(\lambda) x_s$, $\nu = 1, 2 \ldots$, mit den Basisfunktionen $\varrho_0^{(\nu)}(\lambda)$ (λ ein reeller [3]), stetig veränderlicher Parameter) in folgender Weise darstellen [4]):

$$(1) \qquad K(x, x) = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu (L^{(\mu)}(x))^2 + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{(d\mathsf{P}^{(\nu)}(x))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} ,$$

$$(1') \qquad \text{bzw.} \qquad k_{st} = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu l_s^{(\mu)} l_t^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho_s^{(\nu)} d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Die Integrationen beziehen sich stets auf λ. Die Gesamtheit der Eigenwerte und ihrer Häufungsstellen bildet das Punktspektrum der Form; die Stellen, für die es Eigen-

---

[1]) Da es sich hier immer nur um beschränkte lineare und quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen handelt, wird das Wort „beschränkt" häufig weggelassen. Summationen von 1 ad infinitum werden durch eingeklammerten Summationsindex angedeutet.

[2]) Das System x_s wird immer mit konvergenter Quadratsumme vorausgesetzt. Solche Wertsysteme werden beschränkt genannt (kurz: x_s ist beschränkt). Das Wort „beschränkt" wird von Wertsystemen nur in diesem Sinn gebraucht.

[3]) In dieser Arbeit bleibt alles im Bereich des Reellen.

[4]) vgl. Hlg. S. 258.

differentialformen gibt, das Streckenspektrum. Dieses hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Das gesamte Spektrum der Form ragt nicht über das Intervall $(-M, M)$ hinaus. Aus den Integralen können abzählbar unendlich viele Teile für Teilintervalle, in denen $\varrho_0^{(\nu)}(\lambda)$ konstant ist, herausfallen.

Die uneigentlichen Eigenformen der quadratischen Form, d. s. diejenigen, die zu dem uneigentlichen Eigenwert Null gehören, kommen in dieser Darstellung nicht vor. Sie würden mit dem Faktor Null multipliziert werden müssen.

Eine quadratische Form, die nur ein Punktspektrum besitzt, heiße eine Punktform; eine solche, die nur ein Streckenspektrum besitzt, eine Streckenform. Die wichtigsten Eigenschaften dieser beiden Formentypen sind folgende.

Die Gesamtheit aller Eigenformen einer Punktform, einschließlich der uneigentlichen Eigenformen, bildet ein *vollständiges* Orthogonalsystem von Linearformen. Demnach läßt sich jede beliebige Linearform nach Eigenformen einer Punktform entwickeln.

Die Gesamtheit aller Eigendifferentialformen einer Streckenform bildet ein *vollständiges* System von orthogonalen Differentialformen. Jede Linearform läßt sich nach den Eigendifferentialformen einer Streckenform entwickeln (vgl. § 3).

Eine Punktform enthält nur die erste Summe in (1), eine Streckenform nur die zweite. Eine jede Form läßt sich in eine Punkt- und eine Streckenform auf nur eine Weise zerlegen. (Bei der Streckenform muß man hierbei zulassen, daß sie $\lambda = 0$ als uneigentlichen Eigenwert hat.)

§ 2. Die iterierten quadratischen Formen.

Man bezeichnet als die Iterierten einer quadratischen Form ihre Faltungen mit sich selbst: $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ usw. $K^{(n)}$ ist wiederum eine beschränkte Form mit der Schranke M^n.

Die Eigenwerte, -Formen und -Differentialformen einer iterierten Form hängen mit denen der ursprünglichen Form in einfacher Weise zusammen. Sie gehen aus ihnen durch die Transformation $\varkappa = \lambda^n$ hervor. Jede Eigenform $L^{(\mu)}(x)$ ist zugleich eine solche der iterierten Form, und zwar zum Eigenwert $\varkappa_\mu = \lambda_\mu^n$, und jede Eigendifferentialform $d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(\lambda, x)$ liefert eine der Iterierten $d\,\overline{\mathsf{P}}^{(\nu)}(\varkappa, x) = d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(\lambda, x)$, wobei $\varkappa = \lambda^n$ ist. Weitere Eigenformen und Eigendifferentialformen haben die Iterierten nicht.

Die kanonische Darstellung einer iterierten Form ist:

$$(2) \qquad K^{(n)}(x, x) = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu^n \, (L^{(\mu)}(x))^2 + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{(d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(x))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} \,,$$

$$(2') \qquad \text{bzw.} \qquad k_{st}^{(n)} = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu^n \, l_s^{(\mu)} \, l_t^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{d\varrho_s^{(\nu)} \, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \,.$$

§ 3. Ein vollständiges orthogonales System von orthogonalen Differentialformen.

Die Definition eines vollständigen Systems orthogonaler Differentialformen siehe bei Hlg. S. 250. In entsprechender Weise bezeichnet man eine Folge von zueinander orthogonalen Systemen orthogonaler Differentialformen (vgl. ebenda S. 251.) als vollständig, falls neben der Orthogonalitätsbedingung noch

$$(3) \qquad \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{(d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(x))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(s)} x_s^2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d\varrho_s^{(\nu)} \, d\varrho_t^{(\nu)}}{\delta\varrho_0^{(\nu)}} = \delta_{st}$$

gilt. δ_{st} bedeutet das Kroneckersche Symbol: $\delta_{st} = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t \,. \end{cases}$

Durch ein vollständiges System läßt sich eine beliebige beschränkte Linearform $M(x) = \sum_{(s)} m_s x_s$ (mit konstanten Koeffizienten) linear darstellen:

$$(4) \qquad M(x) = \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(x)\, d(\mathsf{P}^{(\nu)} M)}{d\varrho_0^{(\nu)}} \quad \text{bzw.} \quad m_s = \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d\varrho_s^{(\nu)}\, d(\sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} m_t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Ist $d\,\mathsf{P}^{(\nu)}(\lambda, x)$ ein orthogonales System orthogonaler Differentialformen (Vollständigkeit wird hier nicht verlangt) im Intervall (a, b) mit den Basisfunktionen $\varrho_0^{(\nu)}(\lambda)$, m_t ein beschränktes Wertsystem, und sind $u_\nu(\lambda)$ und $f^{(\nu)}(\lambda)$ Funktionen, für die $\sum_{(\nu)} \int_a^b u_\nu^2 \frac{(df^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ konvergiert, so gilt

$$(5) \qquad \sum_{(t)} m_t \sum_{(\nu)} \int_a^b u_\nu \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \sum_{(t)} m_t \int_a^b u_\nu \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

und

$$(6) \qquad \sum_{(t)} \left(\sum_{(\nu)} \int_a^b u_\nu \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right)^2 = \sum_{(\nu)} \int_a^b u_\nu^2 \frac{(df^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

§ 4. Hilfssätze über *Hellinger*sche Integrale.

Die Definitionen der Hellingerschen Integrale und ihre grundlegenden Eigenschaften findet man bei Hlg. S. 236 ff. [1]). Außerdem werden folgende Hilfssätze gebraucht.

Existieren die Einzelintegrale $\int_a^b (u^{(n)})^2 \frac{(df^{(n)})^2}{dg^{(n)}}$ und $\int_a^b (u_1^{(n)})^2 \frac{(df_1^{(n)})^2}{dg^{(n)}}$, $n = 1, 2, \ldots$, für die stetigen Funktionen $u^{(n)}(\lambda)$, $u_1^{(n)}(\lambda)$, $f^{(n)}(\lambda)$, $f_1^{(n)}(\lambda)$ und $g^{(n)}(\lambda)$ und konvergieren die Summen

$$\sum_{(n)} \int_a^b (u^{(n)})^2 \frac{(df^{(n)})^2}{dg^{(n)}} \quad \text{und} \quad \sum_{(n)} \int_a^b (u_1^{(n)})^2 \frac{(df_1^{(n)})^2}{dg^{(n)}} ,$$

so konvergiert auch $\sum_{(n)} \int_a^b u^{(n)} u_1^{(n)} \frac{df^{(n)}\, df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}$, und es gilt die Ungleichung

$$(7) \qquad \left[\sum_{(n)} \int_a^b u^{(n)} u_1^{(n)} \frac{df^{(n)}\, df_1^{(n)}}{dg^{(n)}} \right]^2 \leqq \sum_{(n)} \int_a^b (u^{(n)})^2 \frac{(df^{(n)})^2}{dg^{(n)}} \cdot \sum_{(n)} \int_a^b (u_1^{(n)})^2 \frac{(df_1^{(n)})^2}{dg^{(n)}} .$$

Es ist das ein Analogon zur Schwarzschen Ungleichung im Gebiete der Hellingerschen Integrale.

Es gilt

$$(8) \qquad \int_a^b u_1 \frac{df_1\, d\int_a^\lambda u\, df}{dg} = \int_a^b u\, u_1 \frac{df\, df_1}{dg}$$

mit der Folgerung

$$(8') \qquad \int_a^b \frac{(d\int_a^\lambda u\, df)^2}{dg} = \int_a^b u^2 \frac{(df)^2}{dg} ,$$

wobei die inneren Integrale im Stieltjesschen Sinn aufzufassen sind.

Ähnlich ist

[1]) Siehe auch Hellinger, „Orthogonalinvarianten quadratischer Formen", Diss. (1907) S. 25 ff.

$$(9) \qquad \int_a^b u_1 d \int_a^\lambda u \frac{df\, df_1}{dg} = \int_a^b u\, u_1 \frac{df\, df_1}{dg},$$

woraus folgt: Wenn im Intervall (a, b) nirgends $u(\lambda) = 0$ und

$$(10) \qquad \int_a^\lambda u \frac{df\, df_1}{dg} = \int_a^\lambda \frac{df\, df_2}{dg}$$

identisch in λ ist, so gilt auch umgekehrt ebenso

$$(10') \qquad \int_a^\lambda \frac{1}{u} \frac{df\, df_2}{dg} = \int_a^\lambda \frac{df\, df_1}{dg}.$$

Alle diese Formeln ergeben sich auch durch rein formales Operieren mit dem Differential- und Integralsymbol. Indessen ist das nicht immer gestattet.

Zweiter Abschnitt.

Die Problemstellung und der Zusammenhang der Summengleichung mit der Theorie der quadratischen Formen.

§ 1. Zusammenstellung der Voraussetzungen.

Der Gegenstand dieser Untersuchung ist die Funktionalgleichung

$$(1) \qquad \varphi(s) - \frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k(s)_t\, \varphi_t = f(s), \qquad \lambda \neq 0,$$

die inhomogene Summengleichung genannt wird. Gegeben sind der konstante Parameter λ, der „Kern" $k(s)_t$ und die rechte Seite $f(s)$. Gesucht ist die Funktion $\varphi(s)$, die die Gleichung identisch in s befriedigen soll. Sie tritt auch unter dem Summenzeichen auf, allerdings nur für die diskreten Argumentwerte $t = 1, 2, 3, \ldots$ Die entsprechenden Werte der Funktion werden ihre „Staffelwerte" genannt, und für sie wird das Argument als Index geschrieben: φ_t.

Über den Kern $k(s)_t$ werden folgende Voraussetzungen getroffen. Er sei eine Funktion zweier Argumente, s und t, von denen das eine, s, beliebige Werte von 1 an annehmen kann, während das andere, t, auf die Staffelwerte $1, 2, \ldots$ beschränkt ist. Das ist auch in der Schreibweise hervorgehoben. Nur für diese Werte sei $k(s)_t$ definiert. In s soll der Kern stetig sein. Falls auch $s = 1, 2, \ldots$ ist, so heißen die zugehörigen Funktionswerte k_{st} seine „Gitterwerte", und ihre Gesamtheit bildet die „Gitterform" oder „Gittermatrix" des Kernes.

Eine wesentliche, weitere Voraussetzung ist die, daß die Gittermatrix k_{st} eine *beschränkte*, *symmetrische* Matrix sein soll ($k_{st} = k_{ts}$). Diese soll nicht aus lauter Nullen bestehen. Das ist mehr verlangt als nur nicht identisches Verschwinden von $k(s)_t$ in s und t.

Ist M die Schranke dieser Matrix, so gilt bekanntlich

$$\sum_{(t)} k_{st}^2 \leqq M^2, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Darüber hinaus wird gefordert, daß auch noch für beliebiges s (soll stets heißen: für beliebiges $s \geqq 1$) $\sum_{(t)} k^2(s)_t$ gleichmäßig in s konvergiert und

$$(2) \qquad \sum_{(t)} k^2(s)_t \leqq M^2$$

sein soll. Dann gilt auch stets

$$|k(s)_t| \leqq M.$$

Durch diese Festsetzung wird die Theorie der Summengleichung auf das Engste verknüpft mit der Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlicher

und erscheint gewissermaßen nur als naturgemäße Fortsetzung dieser in ein Gebiet, in dem das eine Argument, s, stetig veränderlich ist.

Von der Lösung $\varphi(s)$ wird entsprechend verlangt, daß sie eine stetige Funktion sei, daß ihre Staffelwerte ein beschränktes Wertsystem bilden

$$\sum_{(s)} \varphi_s^2 \leqq \mu^2 \tag{3}$$

und daß für beliebiges s

$$|\varphi(s)| \leqq \mu$$

ist. Die letzten beiden Annahmen sind voneinander unabhängig.

Notwendig für die Existenz einer solchen Lösung ist, daß auch die rechte Seite $f(s)$ alle dieselben Eigenschaften hat. Denn zusammen mit $\varphi(s)$ hat auch das zweite Glied $\frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t$ diese Eigenschaften, also auch die Differenz $f(s)$. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist nämlich

$$\left| \frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t \right| \leqq \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\sum_{(t)} k^2(s)_t} \sqrt{\sum_{(t)} \varphi_t^2} \leqq \frac{M\mu}{|\lambda|},$$

woraus man auch erkennt, daß die Reihe wegen (2) gleichmäßig in s konvergiert, also eine stetige Funktion darstellt. Weiter ist nach einer bekannten Formel der Theorie der beschränkten Matrizen

$$\sum_{(s)} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k_{st} \varphi_t \right)^2 \leqq \left(\frac{M\mu}{\lambda} \right)^2.$$

Für $f(s)$ gilt dann Stetigkeit, ferner $\sum_{(s)} f_s^2 \leqq m^2$ und $|f(s)| \leqq m$, wo $m = \mu + \frac{M\mu}{|\lambda|}$ ist. Die Existenz einer derartigen Schranke m wird also auch vorausgesetzt.

Die Theorie der Integralgleichungen läßt sich nicht ohne weiteres auf die Summengleichung übertragen. Die 6 grundlegenden Eigenschaften eines Integrales, die Kneser [1]) anführt, sind nicht alle bei der unendlichen Summe erfüllt. Aber man kann die Theorie der Summengleichung unabhängig von der ersteren, nur in Analogie dazu, von Grund auf aufbauen und die sich ergebenden Veränderungen gleich mit vornehmen.

Als Beispiel seien zwei Sätze angeführt, die sich aus den Voraussetzungen direkt ergeben.

Die inhomogene Summengleichung hat, sobald $|\lambda| \geqq M$ ist, stets eine allen Forderungen genügende Lösung in Form der Potenzreihe („Neumannsche Reihe"):

$$\varphi(s) = f^{(0)}(s) + \frac{1}{\lambda} f^{(1)}(s) + \frac{1}{\lambda^2} f^{(2)}(s) + \cdots,$$

wo $f^{(0)}(s) = f(s)$, $f^{(1)}(s) = \sum_{(t)} k(s)_t f_t^{(0)}$, $f^{(2)}(s) = \sum_{(t)} k(s)_t f_t^{(1)}, \ldots$ ist. Sie gilt für kontinuierlich veränderliches λ.

Existiert für ein bestimmtes λ ein „lösender Kern" $\overline{k}(s)_r$, d. h. eine Funktion von der Beschaffenheit des gegebenen Kernes $k(s)_t$, die eine Lösung der Summengleichung im speziellen Fall $f(s) = k(s)_r$, $r = 1, 2, \ldots$, ist, so hat die Gleichung für dieses λ auch bei beliebigem $f(s)$ stets eine Lösung.

Anstatt dieses Verfahren weiter zu verfolgen, wird im Folgenden ein Zusammenhang mit der Theorie der beschränkten quadratischen Formen aufgedeckt. Diese macht den wesentlichen Kern des Problems aus. Auf sie kann die Theorie der Summengleichung zurückgeführt werden.

---

[1]) Kneser, a. a. O. S. 191 f.

§ 2. Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kernes $k(s)_t$.

In üblicher Weise werden Eigenwerte und Eigenfunktionen für den Kern definiert. Hat die homogene Summengleichung

$$\lambda\,\psi(s) - \sum_{(t)} k(s)_t\,\psi_t = 0 \tag{4}$$

für ein bestimmtes λ eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi(s)$ (immer im Sinn von S. 43), so heißt λ Eigenwert des Kernes und $\psi(s)$ zugehörige Eigenfunktion.

Die Form der Gleichung lehrt, daß eine Eigenfunktion $\psi(s)$ durch ihre Staffelwerte bestimmt ist. Ohne weiteres erkennt man Folgendes:

Stimmen zwei Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert in den Staffelwerten überein, so sind sie identisch. Eine Eigenfunktion kann nicht in den Staffelpunkten verschwinden, sonst würde sie identisch verschwinden. Jede lineare Kombination von Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert ist wiederum eine solche. Besteht zwischen Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert in den Staffelpunkten eine lineare Beziehung, so besteht diese auch für beliebiges Argument.

Ein Eigenwert heißt n-fach, wenn n linear unabhängige Eigenfunktionen zu ihm gehören.

Aus diesen Sätzen erkennt man, daß die Staffelwerte der Eigenfunktionen das Wesentliche sind und daß es sich im übrigen um eine naturgemäße Fortsetzung des Definitionsbereiches der Funktion handelt.

§ 3. Zusammenhang mit der Theorie der quadratischen Formen.

Wenn die homogene Summengleichung identisch in s erfüllt ist, so gilt insbesondere für die Staffelwerte

$$\lambda\psi_s = \sum_{(t)} k_{st}\ \psi_t = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Daraus folgt [1]): Ist λ ein Eigenwert des Kernes $k(s)_t$, so ist er zugleich ein solcher der Gitterform k_{st}. Die Staffelwerte ψ_s einer Eigenfunktion ergeben in ihrer Gesamtheit eine Eigenform von k_{st}.

Umgekehrt: Liegt ein solches Gleichungssystem mit einer beschränkten Lösung vor, so bildet die Funktion

$$\psi(s) = \frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k(s)_t\,\psi_t, \tag{4'}$$

die nach S. 43 alle erforderlichen Eigenschaften hat, nach ihrer Bauart eine Lösung der homogenen Gleichung. Also ist $\psi(s)$ Eigenfunktion und λ Eigenwert des Kernes $k(s)_t$. Jede Eigenform ψ_s liefert durch Fortsetzung eine und nur eine Eigenfunktion; denn diese ist durch ihre Staffelwerte und den Eigenwert bestimmt.

Satz. Der Kern $k(s)_t$ hat alle und nur die Eigenwerte seiner Gitterform k_{st}, und seine Eigenfunktionen entsprechen eineindeutig den Eigenformen der Gitterform.

Auch die Vielfachheit eines Eigenwertes ist die gleiche. Es kann auch $n = \infty$ sein.

Somit gelten alle Resultate über Eigenwerte einer quadratischen Form unverändert auch für die Eigenwerte des Kernes $k(s)_t$. Ist z. B. die Gitterform eine Streckenform, so gibt es überhaupt keinen eigentlichen Eigenwert.

Hier hört die *volle* Analogie mit den regulären Integralgleichungen zweiter Art auf. Sie tritt erst wieder ein, wenn man sich auf Kerne mit solchen Gitterformen beschränkt, die eine konvergente Quadratdoppelsumme der Elemente haben. Dann können sich

[1]) Vgl. z. B. Hlg. S. 224.

die Eigenwerte nirgends außer bei Null häufen. Dort aber müssen sie es tun, oder Null ist ein unendlich vielfacher uneigentlicher Eigenwert. Zu jedem eigentlichen Eigenwert gehören nur endliche viele Eigenfunktionen. In der Theorie der Integralgleichungen ist die Formulierung etwas anders, weil hier statt des dort gebräuchlichen Parameters λ sein reziproker Wert eingeführt worden ist. So wird man auch den Schmidtschen Fundamentalsatz von der Existenz mindestens eines Eigenwertes [1]) hier im allgemeinen nicht führen können. Führt man an Stelle der dort auftretenden Integrale die entsprechenden Summen ein, so brauchen sie nicht zu konvergieren.

Eine Ausnahmestellung nimmt der uneigentliche Eigenwert $\lambda = 0$ ein. In dem Fall versagt die ursprüngliche Definition der Eigenfunktionen (4). Zweckmäßig ist es, die Staffelwerte ψ_t der zugehörigen uneigentlichen Eigenfunktionen definitionsgemäß durch die uneigentlichen Eigenformen von k_{st} zu erklären, damit Übereinstimmung besteht, und die übrigen Werte überhaupt unbestimmt zu lassen.

§ 4. Die Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen.

Dank der Beziehung der Eigenfunktionen zu den entsprechenden Eigenformen und der Orthogonalität dieser gilt für zwei Eigenfunktionen $\psi^{(\mu)}(s)$ und $\psi^{(\nu)}(s)$:

$$\sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} \psi_s^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}, \tag{5}$$

mögen sie zum gleichen Eigenwert gehören oder nicht. Im ersten Fall sind sie, wenn sie es nicht schon von vornherein sein sollten, zusammen mit den Eigenformen orthogonalisiert.

Es ist dieses eine Orthogonalität zweier Funktionen in einem etwas andern als im gewöhnlichen Sinn. Um das hervorzuheben, könnte man sie „staffelorthogonal" nennen [2]).

Es ist nicht schwer, staffelorthogonale Funktionensysteme anzugeben. Die trigonometrischen Funktionen, die Potenzen lassen sich staffelorthogonalisieren. Auch ganz allgemeine Verfahren zur Herstellung solcher Systeme lassen sich angeben.

Für die Eigenfunktionen kann man der Besselschen Ungleichung [3]) eine Form geben, die die Analogie mit der Theorie der Integralgleichungen deutlich hervortreten läßt:

$$\sum_{(\mu)} \left(\sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} f_s\right)^2 \leq \sum_{(s)} f_s^2 . \tag{6}$$

f_s sind die beschränkten Staffelwerte einer im übrigen beliebigen stetigen Funktion $f(s)$.

$\gamma_\mu = \sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} f_s$ entspricht im betrachteten Gebiet einem Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(s)$.

Die „Fourier-Koeffizienten" (in diesem übertragenen Sinn) des Kerns $k(s)_t$ selber sind:

$$\sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} k_{st} = \lambda_\mu \psi_t^{(\mu)} , \tag{7}$$

falls $\psi^{(\mu)}(s)$ zum Eigenwert λ_μ gehört.

Ist eine Funktion $f(s)$ darstellbar als „Kernsumme" einer andern, $p(s)$, d. h.

$$f(s) = \sum_{(t)} k(s)_t p_t ,$$

---

[1]) E. Schmidt, „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen", Math. Ann. 63 (1907) S. 455.

[2]) Kneser hat für eine ähnliche Modifikation den Namen „belastet orthogonal" eingeführt (a. a. O. S. 169 f.) Bei der reinen Summengleichung fehlt das Hauptglied der belasteten Integralgleichung, nämlich das Integral.

[3]) Vgl. Hlg. S. 219.

so stehen ihre Fourier-Koeffizienten in der einfachen Beziehung

$$\gamma_\mu = \lambda_\mu \bar{\gamma}_\mu, \tag{8}$$

denn

$$\sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} f_s = \sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} \sum_{(t)} k_{st} p_t = \sum_{(t)} p_t \sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} k_{st} = \lambda_\mu \sum_{(t)} p_t \psi_t^{(\mu)}.$$

Die Umordnung beider Summationen ist für eine beschränkte Matrix k_{st} und zwei beschränkte Wertsysteme p_t und $\psi_s^{(\mu)}$ gestattet. Hierbei, wie auch später in allen ähnlichen Fällen, wird die Symmetrie von k_{st} benutzt.

§ 5. Die Eigendifferentialfunktionen des Kernes.

Neben der ursprünglichen homogenen Gleichung (4) wird diejenige betrachtet, die aus ihr durch gliedweise Integration nach λ hervorgeht. $\psi(s)$ wird als Funktion des Parameters λ angesehen, der in einem bestimmten Intervall der λ-Achse variiert. Δ sei ein beliebiges Teilintervall.

$$\int_\Delta \lambda\, \psi(s, \lambda)\, d\lambda - \sum_{(t)} k(s)_t \int_\Delta \psi_t(\lambda)\, d\lambda = 0,$$

oder, $\varrho(s, \lambda) = \int_0^\lambda \psi(s, \lambda)\, d\lambda$ gesetzt,

$$\int_\Delta \lambda\, d\varrho(s, \lambda) - \sum_{(t)} k(s)_t \Delta\varrho_t(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Hier wird die Voraussetzung der Differenzierbarkeit von $\varrho(s, \lambda)$ fallen gelassen und demgemäß das Integral im Stieltjesschen Sinne aufgefaßt. Die Gleichung soll für jedes Δ gelten, kann also symbolisch ersetzt werden durch [1])

$$\lambda\, d\varrho(s, \lambda) - \sum_{(t)} k(s)_t\, d\varrho_t(\lambda) = 0. \tag{9'}$$

Unter Anwendung der Differentialsymbolik wird definiert: Existiert für eine Stelle λ der λ-Achse eine in s und λ stetige Funktion $\varrho(s, \lambda)$, deren Staffelwerte beschränkt sind und gegen eine stetige Funktion von λ konvergieren, $\sum_{(s)} \varrho_s^2(\lambda) = \varrho_0(\lambda)$, für die weiterhin $d\varrho(s, \lambda)$ nicht identisch verschwindet und die der obigen Gleichung (9) identisch in s genügt, so heißt λ eine Stelle des Streckenspektrums des Kerns $k(s)_t$ und $d\varrho(s, \lambda)$ eine zugehörige Eigendifferentialfunktion.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe $\sum_{(t)} k(s)_t \Delta\varrho_t(\lambda)$ gleichmäßig in s und Δ. $\varrho(s, \lambda)$ kann stets so normiert werden, daß $\varrho(s, 0) = 0$ ist, also auch $\varrho_0(0) = 0$; denn $\varrho(s, \lambda)$ ist nur bis auf eine additive willkürliche Funktion von s bestimmt.

Auf Grund von (9') kann man unter Anwendung der Differentialsymbolik über die Eigendifferentialfunktionen die entsprechenden Sätze wie über die Eigenfunktionen aussprechen, z. B.:

Eine Eigendifferentialfunktion $d\varrho(s, \lambda)$ ist durch ihre Zugehörigkeit zur Stelle λ und durch ihre Staffelwerte $d\varrho_s(\lambda)$ bestimmt. Sie kann nicht in allen Staffelwerten verschwinden, sonst verschwände sie identisch in s, usw. Diese symbolischen Sätze bekommen ihren eigentlichen Sinn in entsprechenden Integraldarstellungen, die sich auf Grund von (9) streng beweisen lassen [2]).

---

[1]) Vgl. Hlg. S. 242

[2]) Die ausführliche Begründung ist für das Folgende nicht wesentlich.

§ 6. Zusammenhang mit der Theorie der quadratischen Formen.

Ist die Definitionsgleichung identisch in s erfüllt, so gilt auch insbesondere

$$\lambda\, d\varrho_s(\lambda) - \sum_{(t)} k_{st}\, d\varrho_t(\lambda) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Daraus folgt[1]): Ist λ eine Stelle des Streckenspektrums des Kerns $k(s)_t$, so ist es zugleich eine solche der Gitterform k_{st}. Die Staffelwerte $d\varrho_s(\lambda)$ einer Eigendifferentialfunktion definieren in ihrer Gesamtheit eine zugehörige Eigendifferentialform der Gitterform.

Umgekehrt: Liegt ein solches System von Gleichungen mit einer allen Forderungen genügenden Differentiallösung $d\varrho_s(\lambda)$ vor, $s = 1, 2, \ldots$, so bildet die durch

$$(9'') \qquad d\varrho(s, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{(t)} k(s)_t\, d\varrho_t(\lambda)$$

und durch die Zusatzbedingung $\varrho(s, 0) = 0$ bestimmte Funktion $\varrho(s, \lambda)$ eine Eigendifferentialfunktion des Kernes $k(s)_t$. Sie hat alle erforderlichen Eigenschaften und genügt nach ihrer Bauart der homogenen Gleichung. Jede Eigendifferentialform der Gitterform liefert durch Fortsetzung eine und nur eine Eigendifferentialfunktion; denn diese ist durch λ und ihre Staffelwerte bestimmt.

Satz. Der Kern $k(s)_t$ hat dasselbe Streckenspektrum wie seine Gitterform k_{st}, und seine Eigendifferentialfunktionen entsprechen eineindeutig den Eigendifferentialformen der Gitterform.

Dieser Satz ermöglicht es, auch alle Resultate über das Streckenspektrum und die Eigendifferentialformen einer quadratischen Form auf den betrachteten Fall zu übertragen. Man könnte eine Vielfachheit des Streckenspektrums an einer Stelle λ in entsprechender Weise definieren, die Orthogonalitätseigenschaft den Eigendifferentialfunktionen untersuchen usw.

Hier sei nur die Form angegeben, die die übertragene Besselsche Ungleichung[2]) für die Eigendifferentialfunktionen annimmt:

$$(10) \qquad \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\sum_{(s)} \varrho_s^{(\nu)} f_s)^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} \leqq \sum_{(s)} f_s^2.$$

$d\delta_\nu = d\sum_{(s)} \varrho_s^{(\nu)} f_s$ könnte man als „Fourier-Differentialkoeffizienten“ der Funktion $f(s)$ bezeichnen. Diejenigen des Kerns $k(s)_t$ selber sind:

$$(11) \qquad d\sum_{(s)} k_{st}\, \varrho_s^{(\nu)} = \sum_{(s)} k_{ts}\, d\varrho_s^{(\nu)} = \lambda\, d\varrho_t^{(\nu)}.$$

Ist $f(s)$ als Kernsumme einer andern Funktion $p(s)$ darstellbar, also $f(s) = \sum_{(t)} k(s)_t p_t$, so stehen ihre Fourier-Differentialkoeffizienten $d\delta_\nu$ und $d\bar{\delta}_\nu$ in der einfachen symbolischen Beziehung

$$(12) \qquad d\delta_\nu = \lambda\, d\bar{\delta}_\nu.$$

Die symbolischen Gleichungen (11) und (12) bekommen aber nur in Integraldarstellung ihren eigentlichen Sinn.

Wendet man (9) auf die Staffelwerte von $\varrho(s, \lambda)$ und das Intervall $(0, \lambda)$ an, so ist

$$(11') \qquad \sum_{(s)} k_{st}\, \varrho_s^{(\nu)} = \sum_{(s)} k_{ts}\, \varrho_s^{(\nu)} = \int_0^{\lambda} \lambda\, d\varrho_t^{(\nu)}.$$

---

[1]) Vgl. z. B. Hlg. S. 242.

[2]) Vgl. Hlg. S. 251.

Weiter ist

$$\delta_\nu = \sum_{(s)} \varrho_s^{(\nu)} f_s = \sum_{(s)} \varrho_s^{(\nu)} \sum_{(t)} k_{st} p_t = \sum_{(t)} p_t \sum_{(s)} k_{ts} \varrho_s^{(\nu)} = \sum_{(t)} p_t \int_0^\lambda \lambda \, d\varrho_t^{(\nu)} = \int_0^\lambda \lambda \, d \sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} p_t .$$

Summation und Integration durften vertauscht werden, da $\sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} p_t$ gleichmäßig in λ konvergiert [1]).

Hierin ist $\sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} p_t = \bar{\delta}_\nu$, also gilt

$$\delta_\nu = \int_0^\lambda \lambda \, d\bar{\delta}_\nu . \tag{12'}$$

Dieses kann man auch nach Fl. (8) S. 41 erweitern zu

$$\int_{-M}^{M} u \, \frac{df_1 \, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} u\lambda \, \frac{df_1 \, d\bar{\delta}_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} . \tag{12''}$$

§ 7. Die iterierten Kerne.

Neben dem Kern $k(s)_t$ wird der „transponierte Kern" $k_s(t)$ eingeführt. Trägt man die beiden Argumente s und t in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, so ist $k(s)_t$ nur längs den Horizontalen $t = 1, 2, \ldots$, $k_s(t)$ nur längs den Vertikalen $s = 1, 2, \ldots$ definiert. Sie stehen in der gegenseitigen Beziehung, daß $k(s)_t$ für einen Punkt (σ, τ) gleich $k_s(t)$ ist für den an der Hauptdiagonale gespiegelten Punkt (τ, σ):

$$k(\sigma)_\tau = k_\tau(\sigma) . \tag{13}$$

Da der Kern $k(s)_t$ schon an sich symmetrische Gitterwerte hat, so $k_s(t)$ natürlich auch. Sie haben beide dieselbe Gitterform mit der Schranke M. Das kommt in der verwendeten Bezeichnungsweise dadurch zum Ausdruck, daß für die Gitterwerte aus der obigen Beziehung das gewöhnliche $k_{\sigma\tau} = k_{\tau\sigma}$ entsteht.

Der transponierte Kern $k_s(t)$ ist von derselben Art wie der ursprüngliche. Er ist stetig in t, und es gilt

$$\sum_{(s)} k_s^2(t) \leqq M^2, \quad |k_s(t)| \leqq M.$$

Aus diesen beiden Kernen kann man wie in der Theorie der Integralgleichungen iterierte Kerne bilden, die hier die Eigentümlichkeit haben, über das Definitionsgebiet des ursprünglichen Kernes hinaus definiert zu sein, nämlich für jedes s und jedes t. Beide Argumente durchlaufen kontinuierlich veränderliche Werte.

Die Definitionsgleichungen sind:

$$\begin{cases} k^{(2)}(s,t) = \sum_{(r)} k(s)_r \, k_r(t) \\ k^{(3)}(s,t) = \sum_{(r_1)} \sum_{(r_2)} k(s)_{r_1} k_{r_1 r_2} k_{r_2}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k^{(n)}(s,t) = \sum_{(r_1)} \cdots \sum_{(r_{n-1})} k(s)_{r_1} \, k_{r_1 r_2} \cdots k_{r_{n-1}}(t) . \end{cases} \tag{14}$$

Die so definierten iterierten Kerne haben folgende Eigenschaften. Es ist

$$|k^{(2)}(s,t)| \leqq \sqrt{\sum_{(r)} k^2(s)_r} \sqrt{\sum_{(r)} k_r^2(t)} \leqq M^2 .$$

Die Reihe für $k^{(2)}(s,t)$ konvergiert gleichmäßig in s und t; $k^{(2)}(s,t)$ ist also gleichzeitig in beiden Argumenten stetig. Weiter ist es symmetrisch; denn wegen (13) ist

$$\sum_{(r)} k(t)_r \, k_r(s) = \sum_{(r)} k_r(t) \, k(s)_r = \sum_{(r)} k(s)_r \, k_r(t) .$$

---

[1]) Vgl. Hlg. S. 238 f.

Endlich ist für jedes s ähnlich wie auf S. 43

$$\sum_{(t)} (k^{(2)}(s)_t)^2 = \sum_{(t)} \left(\sum_{(r)} k(s)_r k_{rt}\right)^2 \leqq M^4.$$

Es ist leicht, sich zu überzeugen, daß auch die übrigen Iterierten die entsprechenden Eigenschaften haben, also stetig und symmetrisch sind und

$$|k^{(n)}(s,t)| \leqq M^n, \qquad \sum_{(t)} (k^{(n)}(s)_t)^2 \leqq M^{2n}$$

ist. Weiter besteht der Zusammenhang

$$k^{(m+n)}(s,t) = \sum_{(r)} k^{(m)}(s)_r \, k_r^{(n)}(t). \tag{15}$$

Die Summe rechts hängt also nur von $m + n$ ab.

Die Iterierten stimmen mit ihren eigenen transponierten Kernen überein. Die letzteren werden also nicht mehr eingeführt.

Aus den Definitionsformeln erkennt man sofort, daß die Gitterformen der iterierten Kerne mit den entsprechenden iterierten Formen der Gitterform des ursprünglichen Kernes übereinstimmen. Weil die letztere nicht identisch verschwindet, können auch alle anderen Gitterformen nicht identisch verschwinden.

Dank diesem Zusammenhang kann man wieder die ganze Eigenwerttheorie der iterierten Formen auf die iterierten Kerne übertragen, indem man die Resultate von S. 40 und S. 44 bzw. 47 zusammenstellt.

Satz. Der iterierte Kern $k^{(n)}(s,t)$, in dem das eine Argument, etwa t, als nur der Werte $t = 1, 2, \ldots$ fähig gedacht ist, also $k^{(n)}(s)_t$, hat ein System von Eigenwerten, -Funktionen und -Differentialfunktionen, das aus dem entsprechenden System des ursprünglichen Kernes durch die Transformation $\varkappa = \lambda^n$ der λ-Achse in sich hervorgeht. Damit ist sein Spektrum erschöpft.

Es ist allerdings nötig, dabei zu beweisen, daß auch für *beliebige* Werte des Argumentes s die Eigenfunktionen $\psi(s)$ und die Eigendifferentialfunktionen $d\varrho(s, \lambda)$ der beiden Kerne durch diese Transformation ineinander übergehen. Das hat auf Grund des Zusammenhanges mit den Staffelwerten (4′) und (9″) weiter keine Schwierigkeit.

Es bestehen somit für den n-fach iterierten Kern die Formeln

$$\lambda^n \, \psi(s) - \sum_{(t)} k^{(n)}(s)_t \, \psi_t = 0, \tag{16}$$

$$\int_{\Lambda} \lambda^n \, d\varrho(s,\lambda) - \sum_{(t)} k^{(n)}(s)_t \, \Delta\varrho_t(\lambda) = 0. \tag{17}$$

Dritter Abschnitt.

Der Fall einer Punktform als Gitterform.

In diesem Abschnitt sei eine Punktform als Gitterform des Kernes zugrunde gelegt.

Die wesentliche Eigenschaft der Eigenfunktionen (mit den uneigentlichen) ist in diesem Fall die, daß ihre Staffelwerte ein vollständiges Orthogonalsystem von Linearformen bilden:

$$\sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} \psi_s^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu} \qquad \text{Orthogonalität,} \tag{1}$$

$$\sum_{(\mu)} \psi_s^{(\mu)} \psi_t^{(\mu)} = \delta_{st} \qquad \text{Vollständigkeit.} \tag{2}$$

Außerdem bilden die $\psi_s^{(\mu)}$ eine beschränkte Matrix mit der Schranke 1.

Auf Grund dieser Tatsachen können eine Reihe von Entwicklungssätzen abgeleitet werden.

Bei der Punktform liegen indes die Verhältnisse so, wie bei den regulären Integralgleichungen. Nicht nur die Resultate sind analog, sondern auch die Herleitung derselben kann in entsprechender Weise geschehen. An Stelle der Integrale treten konvergente unendliche Summen. Deshalb sei hier auf die Ausführung der Beweise verzichtet und es seien nur die Resultate angegeben. Im übrigen wiederholen sich die Sätze im vierten Abschnitt bei der Streckenform, die Beweise erfordern dort allerdings andere Hilfsmittel. Sie verlaufen aber auch analog und lassen sich in viel einfacherer Weise auf diesen Abschnitt übertragen.

Jeder Kern läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach seinen Eigenfunktionen entwickeln:

$$k(s)_t = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu \, \psi^{(\mu)}(s) \, \psi_t^{(\mu)} \qquad (3)$$

$t = 1, 2, \ldots$
s beliebig.

Die uneigentlichen Eigenfunktionen fallen aus dieser Darstellung heraus, weil sie mit Null multipliziert werden.

Insbesondere gilt diese Darstellung, wenn die Gitterform vollstetig ist, oder eine konvergente Quadratdoppelsumme der Elemente $\sum_{(s)} \sum_{(t)} k_{st}^2$ hat, oder im Fall endlich vieler Veränderlicher; denn jeder dieser Fälle ist als Spezialfall im vorherigen enthalten. Dann gehören zu jedem Eigenwert nur endlich viele Eigenfunktionen, die Eigenwerte haben nur einen Häufungspunkt, sie konvergiren nach Null und lassen sich dem Betrage nach anordnen: $\lim \lambda_\mu = 0$. Es zeigt sich eine vollkommene Analogie mit der Kernentwicklung in der Theorie der Integralgleichungen.

Es liegt nahe, den Kern durch die Definition $k(s,t) = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu \, \psi^{(\mu)}(s) \, \psi^{(\mu)}(t)$ auch in das Gebiet des beliebigen t hinein fortzusetzen. Das geht aber im allgemeinen nicht, weil die Konvergenz der Reihe dann nicht zu beweisen ist.

Für die iterierten Kerne geht das indessen wohl. Auch sind sie schon für beliebiges t definiert. Für sie gilt von $n = 2$ an:

$$k^{(n)}(s,t) = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu^n \, \psi^{(\mu)}(s) \, \psi^{(\mu)}(t) \,. \qquad (4)$$

Bezüglich der Konvergenzverhältnisse nimmt also der ursprüngliche Kern auch solch' eine Ausnahmestellung ein wie bei den regulären Integralgleichungen.

Auch gewisse willkürliche Funktionen können in Fourierscher Art nach Eigenfunktionen des Kernes entwickelt werden:

$$f(s) = \sum_{(\mu)} \gamma_\mu \, \psi^{(\mu)}(s), \quad \text{wo } \gamma_\mu = \sum_{(t)} \psi_t^{(\mu)} \, f_t \text{ ist.} \qquad (5)$$

Ganz willkürlich kann $f(s)$ allerdings nicht sein, denn bei zwei verschiedenen Funktionen mit gleichen Staffelwerten stimmen die „Fourier-Koeffizienten" γ_μ überein; sie hätten die gleiche Entwicklung.

(5) gilt unter folgender Voraussetzung über $f(s)$, die derjenigen in der Theorie der Integralgleichungen entspricht [1]). $f(s)$ soll als Kernsumme einer anderen Funktion $p(s)$ darstellbar sein:

$$f(s) = \sum_{(t)} k(s)_t \, p_t, \quad \sum_{(t)} p_t^2 \text{ konvergent.} \qquad (6)$$

Dadurch ist das Verhalten von $f(s)$ zu demjenigen der Eigenfunktionen in Beziehung gesetzt. Es ist $f(s)$ durch Angabe von abzählbar unendlich vielen Werten bestimmt, ist stetig, hat beschränkte Staffelwerte und bleibt dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Schranke. Es handelt sich auch hier um eine Fortsetzung einer

[1]) E. Schmidt, a. a. O. S. 452.

nur in den Staffelwerten willkürlichen Funktion in das Gebiet des beliebigen Argumentes hinein.

Auch in (5) fallen die eventuell vorhandenen Glieder mit uneigentlichen Eigenfunktionen heraus; denn ihre „Fourier-Koeffizienten" verschwinden.

Das Ausgangsproblem, die Lösung der inhomogenen Summengleichung

$$\varphi(s) - \frac{1}{\lambda_0} \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t = f(s), \qquad \lambda_0 \neq 0, \tag{7}$$

läßt sich für Kerne, deren Gitterform eine Punktform ist, auf zweierlei Art und Weise behandeln. Erstens gewinnt man die allgemeine eindeutige Lösung

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_\mu \, a_\mu}{\lambda_0 - \lambda_\mu} \psi^{(\mu)}(s), \tag{8}$$

wo a_μ die „Fourier-Koeffizienten" der Funktion $f(s)$ bedeuten, und λ_0 kein Eigenwert und keine Häufungsstelle der Eigenwerte sein darf, nach der Schmidtschen Methode [1]). Zweitens kann man das entsprechende Gitterproblem, d. i. die Auflösung von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten φ_s nach der Methode der Matrizenrechnung behandeln, und so die Staffelwerte der gesuchten Funktion bestimmen. Sind diese erst bekannt, so liefert die Summengleichung (7) direkt die allgemeine Lösung in Übereinstimmung mit (8).

Wenn $|\lambda_0| > M$ ist, so ist es sicher kein Eigenwert und keine Häufungsstelle. Dann existiert also stets eine eindeutige Lösung. Ist die Gitterform vollstetig, so gibt es nur die einzige Häufungsstelle Null, die nicht in Frage kommt, da $\lambda_0 = 0$ ausgeschlossen worden ist. Die inhomogene Gleichung hat dann stets eine eindeutige Lösung, sobald λ_0 kein Eigenwert ist.

Ist λ_0 ein Eigenwert, etwa λ_m, so kann die Gleichung trotzdem noch für spezielle $f(s)$ eine Lösung haben. Dazu ist es nur nötig, $f(s)$ der Bedingung zu unterwerfen:

$$a_j = \sum_{(s)} f_s \, \psi_s^{(j)} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

für alle diejenigen Eigenfunktionen, die zum Eigenwert λ_m gehören. Die Lösung ist dann nicht mehr eindeutig, sondern nur bis auf $\sum_{(j)} c_j \, \psi^{(j)}(s)$ mit beliebigen beschränkten c_j bestimmt. Diese Glieder treten in dem Ausdruck (8) an die Stelle der kritischen, für die $a_j = 0$ ist.

Auch wenn λ_0 eine Häufungsstelle ist, kann bei speziellem $f(s)$ die Lösung (8), die dann sogar eindeutig ist, existieren. Dazu ist nötig, daß $\sum_{(\mu)} \left(\frac{a_\mu}{\lambda_0 - \lambda_\mu} \right)^2$ konvergiert. Das gibt auch ein System von Bedingungen für $f(s)$.

Vierter Abschnitt.

Der Fall einer Streckenform als Gitterform.

Hier liegt der Gegenfall zum vorigen Abschnitt vor. Die Gitterform sei eine Streckenform. Dann ist die wesentliche Eigenschaft der Eigendifferentialfunktionen die, daß ihre Staffelwerte die Koeffizienten eines vollständigen, orthogonalen Systems von orthogonalen Differentialformen bilden (vgl. S. 40 und Hlg. S. 251):

(1) $$\sum_{(s)} \Delta_1 \varrho_s^{(\mu)} \Delta_2 \varrho_s^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \Delta_{12} \varrho_0^{(\nu)}, & \mu = \nu \end{cases}$$ Orthogonalität,

(2) $$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_s^{(\nu)} \, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \delta_{st}$$ Vollständigkeit.

[1]) E. Schmidt, a. a. O. S. 453.

Man kann übrigens auch der Orthogonalitätsbedingung eine den anderen Fällen analoge Form geben (vgl. S. 49):

$$(1') \qquad \sum_{(s)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_s^{(\mu)}(\lambda)\, d\varrho_s^{(\nu)}(\lambda')}{d\varrho_0^{(\nu)}(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}\,,$$

die aber nichts anderes als (1) aussagen soll.

Hilfssatz. Es ist nach Fl. (11), S. 240, bei Hlg., und Fl. (8), S. 41, hier, für beliebiges s und willkürliche stetige Funktionen $u(\lambda)$ und $f(\lambda)$, für welche nur das Integral $\int_{-M}^{M} u^2 \frac{df^2}{d\varrho_0}$ existiert:

$$\sum_{(t)} k(s)_t \int_{-M}^{M} u \frac{df\, d\varrho_t}{d\varrho_0} = \int_{-M}^{M} u \frac{df\, d\sum_{(t)} k(s)_t \varrho_t}{d\varrho_0} = \int_{-M}^{M} u \frac{df\, d\int_0^{\lambda} \lambda\, d\varrho(s)}{d\varrho_0} = \int_{-M}^{M} u\lambda \frac{df\, d\varrho(s)}{d\varrho_0}\,.$$

Diese Formel wird mit dem früheren Hilfssatz (5), S. 41, in einen zusammengezogen. Die dortigen Voraussetzungen über die $d\varrho_t^{(\nu)}(\lambda)$ werden von dem System aller Eigendifferentialformen des Kernes $k(s)_t$ im Intervall $(-M, M)$ erfüllt. $k(s)_t$ bildet für jedes feste s ein beschränktes Wertsystem, das an Stelle von m_t tritt. $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} u_\nu^2 \frac{(df^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ konvergiert nach Voraussetzung.

Es folgt der Hilfssatz:

Für die Eigendifferentialfunktionen $d\varrho^{(\nu)}(s,\lambda)$ des Kernes $k(s)_t$ (die Eigenschaft der Vollständigkeit wird hier nicht verlangt) gilt die Formel

$$(3) \qquad \sum_{(t)} k(s)_t \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} u_\nu \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} u_\nu \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}}\,.$$

§ 1. Die Entwicklung des Kernes nach Eigendifferentialfunktionen.

Die Summe $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ sei erstreckt über alle Eigendifferentialfunktionen des Kernes. Nach Fl. (7), S. 41, ist

$$\left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right| \leqq \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \cdot \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\varrho_t^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}}\,.$$

Der zweite Radikand ist gleich 1. Den ersten kann man mit Hilfe von Fl. (8′), S. 41, und der Besselschen Ungleichung, S. 47, (hier Gleichung) abschätzen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\int_0^{\lambda} \lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} \\ \qquad = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\sum_{(t)} k(s)_t \varrho_t^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(t)} k^2(s)_t \leqq M^2 \quad \text{für jedes } s. \end{cases}$$

Also

$$\left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right| \leqq M\,.$$

Da für die Reihe der absoluten Beträge dieselbe Abschätzung gilt und man diese auf den von s freien zweiten Faktor werfen kann, so konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in s. Um ihren Konvergenzwert zu berechnen, wird die Hilfsformel (3), in der r statt t geschrieben wird, für $f^{(\nu)} = \varrho_t^{(\nu)}$ und $u_\nu = 1$ angewandt:

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(r)} k(s)_r \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_r^{(\nu)}\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Hier tritt für die innere Summe die Vollständigkeitsrelation (2) in Kraft, und der ganze Ausdruck ergibt $k(s)_t$.

Jeder Kern mit einer Streckenform als Gitterform läßt sich nach seinen Eigendifferentialfunktionen in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln:

$$k(s)_t = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \qquad \begin{matrix} s \text{ beliebig,} \\ t = 1, 2, \ldots \end{matrix} \tag{5}$$

§ 2. Die Entwicklung der iterierten Kerne.

Da die Eigendifferentialfunktionen der iterierten Kerne bekannt sind (S. 49), kann man für $t = 1, 2 \ldots$ auch ihre Entwicklung sofort angeben:

$$k^{(n)}(s)_t = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} . \tag{6}$$

Beide Seiten sind auch für beliebiges t definiert, denn die Reihe konvergiert auch dann noch, sobald $n > 1$ ist:

$$\left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho^{(\nu)}(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right| \leqq M^{n-2} \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \cdot \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(t))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \leqq M^n .$$

Hieraus erkennt man, daß die Reihe absolut konvergiert. Gleichmäßige Konvergenz kann man auf diesem Wege nur für *eine* Veränderliche zeigen. Erst wenn bewiesen ist, daß der Radikand eine gleichmäßig konvergente Reihe ist, folgt daraus gleichmäßige Konvergenz der ursprünglichen Reihe in beiden Veränderlichen (vgl. S. 54).

§ 3. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigendifferentialfunktionen.

Die zu entwickelnde Funktion $f(s)$ wird der alten Einschränkung $f(s) = \sum_{(t)} k(s)_t\, p_t$, $\sum_{(t)} p_t^2$ konvergent, unterworfen, und die Reihe $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ wird untersucht. Hierbei bedeutet $d\delta_\nu = d \sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} f_t$ den „Fourier-Differentialkoeffizienten“ von $f(s)$. $d\delta_\nu = d \sum_{(r)} \varrho_r^{(\nu)} p_r$ sei derjenige von $p(s)$.

Nach Fl. (12″), S. 48, kann man wie folgt abschätzen (mit Benutzung von (4), S. 52, und (10), S. 47):

$$\left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right| = \left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right|$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \cdot \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\delta_\nu)^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \leqq M \sqrt{\sum_{(t)} p_t^2} .$$

Die Reihe ist wiederum absolut und gleichmäßig in s konvergent.

Zunächst wird die entsprechende Reihe für p_t aufgestellt, die gültig ist, weil eine

jede beschränkte Linearform nach Eigendifferentialformen entwickelt werden kann, falls diese ein vollständiges System bilden (vgl. S. 41):

$$p_t = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, d\bar{\delta}_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Darauf kann man die Entwicklung von $f(s)$ zurückführen:

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\bar{\delta}_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(t)} k(s)_t \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, d\bar{\delta}_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

nach Hilfssatz (3) für $f^{(\nu)} = \bar{\delta}_\nu$ und $u_\nu = 1$. Die Voraussetzung des Hilfssatzes ist dabei erfüllt. Also ist

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(t)} k(s)_t\, p_t = f(s) .$$

Eine jede Funktion, die sich als Kernsumme darstellen läßt, kann man nach den Eigendifferentialfunktionen des Kernes (mit einer Streckenform als Gitterform) in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln:

$$(7) \qquad f(s) = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} , \quad \text{wo} \quad \delta_\nu = \sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} f_t \quad \text{ist.}$$

Anwendung.

Da die iterierten Kerne von $n = 2$ an als Kernsumme darstellbar sind:

$$k^{(n)}(s, t) = \sum_{(r)} k(s)_r\, k_r^{(n-1)}(t) ,$$

kann auf sie der Entwicklungssatz angewandt werden. Der „Fourier-Differentialkoeffizient" des n-fach iterierten Kernes sei $d\delta_\nu^{(n)}(t)$. Er hängt hier vom Parameter t ab.

Nach Fl. (12''), S. 48, gilt

$$k^{(n)}(s, t) = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu^{(n)}(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu^{(n-1)}(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Dieses Verfahren setzt man fort und erhält

$$k^{(n)}(s, t) = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^{n-1} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Hierin ist nach Fl. (13), S. 48, $\delta_\nu(t) = \sum_{(r)} \varrho_r^{(\nu)} k_r(t) = \sum_{(r)} \varrho_r^{(\nu)} k(t)_r = \int_0^\lambda \lambda\, d\varrho^{(\nu)}(t)$. Also gilt für beliebiges s und t

$$(8) \qquad k^{(n)}(s, t) = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho^{(\nu)}(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} , \qquad n > 1.$$

Für $n = 2$ und $s = t$ überzeugt man sich, daß die Reihe $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda\, d\varrho^{(\nu)}(t))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ die stetige Funktion $k^{(2)}(t, t)$ darstellt. Da die einzelnen Glieder positiv und stetig sind, so konvergiert die Reihe gleichmäßig. Damit ist dann auch nach der Schlußbemerkung von § 2 gezeigt, daß die Reihe (8) gleichmäßig in s und t konvergiert.

§ 4. Die inhomogene Summengleichung.

Die inhomogene Summengleichung

$$\varphi(s) - \frac{1}{\lambda_0} \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t = f(s), \qquad \lambda_0 \neq 0, \tag{9}$$

sei vorgelegt. k_{st} sei eine Streckenform.

Existiert eine Lösung $\varphi(s)$, so läßt sich die Differenz $\varphi(s) - f(s) = \sum_{(t)} k(s)_t \left(\frac{1}{\lambda_0} \varphi_t\right)$ als Kernsumme darstellen, also nach Eigendifferentialfunktionen entwickeln.

Es seien da_ν die bekannten „Fourier-Differentialkoeffizienten“ von $f(s)$, $d\beta_\nu$ die gesuchten von $\varphi(s)$, also $d(\beta_\nu - a_\nu)$ diejenigen von $\varphi(s) - f(s)$ und $d\left(\frac{1}{\lambda_0} \beta_\nu\right)$ die von $\frac{1}{\lambda_0} \varphi(s)$. Sie müssen alle „beschränkt“ sein. Darunter sei die Konvergenz von

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\beta_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

verstanden. Diese findet statt, wenn $f(s)$ und $\varphi(s)$ beschränkte Staffelwerte haben.

Die Konvergenz von $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d(\beta_\nu - a_\nu)^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ ist dann nach Fl. (7), S. 41, eine notwendige Folgerung.

Fl. (12″), S. 48, gibt einen Zusammenhang der „Fourier-Differentialkoeffizienten“:

$$\int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d(\beta_\nu - a_\nu)}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\beta_\nu}{d\varrho^{(\nu)}}.$$

Hieraus folgt durch andersartige Zusammenfassung

$$\int_{-M}^{M} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\beta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}.$$

Fl. (12″), S. 48, sowie auch diese Folgerung aus ihr, gelten ebenso für ein beliebiges Teilintervall Δ. Deshalb ist nach Fl. (10′), S. 42, auch die Umkehrung gültig:

$$\int_{-M}^{M} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\beta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}},$$

ebenso für ein beliebiges Teilintervall.

Allerdings ist dabei zunächst anzunehmen, daß die Eigendifferentialfunktion $d\varrho^{(\nu)}(s)$ die Stelle λ_0 nicht in ihrem Spektrum enthält, damit die Unstetigkeitsstelle von $\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$ aus dem Integral herausfällt. Ist jedoch λ_0 im Spektrum enthalten, so kann man in gewöhnlicher Weise den Begriff eines uneigentlichen Integrales einführen. Die Formel muß auch dann noch bestehen bleiben, weil die rechte Seite eine stetige Funktion jeder Integrationsgrenze ist, also stets den nötigen Grenzwert besitzt.

Zerlegt man jetzt $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} = 1 + \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda}$ und gruppiert wieder um, so entsteht

$$\int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d(\beta_\nu - a_\nu)}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}.$$

Die Entwicklung der Differenz ist demnach

$$\varphi(s) - f(s) = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Existiert also eine Lösung, so muß sie sich auf die Form

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} \tag{10}$$

bringen lassen.

Weiter findet man unter zweimaliger Anwendung derselben Methode:

$$\int_{-M}^{M} \frac{(d\beta_\nu - da_\nu)^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{(d\beta_\nu - da_\nu)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \frac{(d\beta_\nu - da_\nu)\, d \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

$$= \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{da_\nu\, d \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \int_{-M}^{M} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda}\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}},$$

wobei wiederum unter den Integralen nötigenfalls uneigentliche zu verstehen sind, deren Konvergenz wie oben folgt.

Also muß

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(d\beta_\nu - da_\nu)^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda}\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

konvergieren. Hieraus und aus der Konvergenz von $\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ ergibt sich auch die der nachstehenden Summe

$$\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} + 1\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \lambda_0 \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

mit den „Fourier-Differentialkoeffizienten“ da_ν einer beliebigen Funktion $f(s)$. Dazu ist notwendig, daß $|\lambda_0 - \lambda| \geqq \delta$ ist, δ eine feste positive Zahl. Denn liegt λ_0 im Spektrum und gehört etwa zu der Eigendifferentialfunktion $d\varrho^{(\nu)}(s)$, so erfordert die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-M}^{M} \left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$ eine Bedingung für da_ν hinsichtlich des Verhaltens an der Stelle λ_0, die durch eine beliebige Funktion $f(s)$ nicht erfüllt sein wird.

λ_0 darf also nicht im Streckenspektrum liegen. Es kann aber wohl noch innerhalb des Intervalles $(-M, M)$ liegen; denn es kann dort Teile geben, die nicht zum Streckenspektrum gehören. Aus den Integralen fallen die entsprechenden Anteile heraus.

Unter der Voraussetzung $|\lambda_0 - \lambda| \geqq \delta$ ist umgekehrt der Ausdruck (10) wirklich eine Lösung mit den verlangten Eigenschaften. Zunächst ist dann zu beweisen, daß die Reihe konvergiert. Nach (4) ist

$$\left| \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s) da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right| \leqq \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{(\lambda d\varrho^{(\nu)}(s))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} \cdot \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}}$$

$$\leqq \frac{M}{\delta} \sqrt{\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}} .$$

Daraus folgt, daß die Reihe

$$F(s) = f(s) + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s) da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

gleichmäßig in s konvergiert, also eine stetige Funktion $F(s)$ darstellt, die auch unterhalb einer festen Größe bleibt. Ihre Staffelwerte sind beschränkt, weil nach Fl. (6), S. 41,

$$\sum_{(s)} \left(\sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right)^2 = \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \right)^2 \frac{da_\nu^2}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

konvergiert.

Es bleibt übrig, zu zeigen, daß $F(s)$ tatsächlich eine Lösung ist:

$$\sum_{(s)} k(r)_s F_s = \sum_{(s)} k(r)_s f_s + \sum_{(s)} k(r)_s \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho_s^{(\nu)} da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}$$

$$= \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(r)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda^2}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(r)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Das erste Glied ist nach Eigendifferentialfunktionen entwickelt, das zweite nach dem Hilfssatz (3) umgeformt worden, dessen Voraussetzung hier gerade erfüllt ist.

$$\sum_{(s)} k(r)_s F_s = \lambda_0 \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(r)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \lambda_0 (F(r) - f(r)) .$$

$$F(r) - \frac{1}{\lambda_0} \sum_{(s)} k(r)_s F_s = f(r), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung bei beliebigem $f(s)$ ist also $|\lambda_0 - \lambda| \geqq \delta$, d. h. λ_0 gehört nicht dem Streckenspektrum an.

Ist $|\lambda_0| > M$, so gibt es die Lösung stets. Ist λ_0 doch ein Punkt des Streckenspektrums, so kann es für spezielle $f(s)$, die gewissen Bedingungen genügen, immer noch eine Lösung geben, und zwar bleibt die Lösung eindeutig, da Eigenwerte nicht existieren.

Fünfter Abschnitt.

Eine beliebige beschränkte Form als Gitterform.

Der allgemeine Fall einer beliebigen Form als Gitterform des Kernes $k(s)_t$ läßt sich kurz erledigen. Es brauchen nur die Formeln der beiden Spezialfälle im dritten und vierten Abschnitt superponiert zu werden. Die Grundlagen hierzu bieten folgende Tatsachen.

§ 1. Hilfssätze.

Ein System von orthogonalen Linearformen $L^{(\mu)}(x) = \sum_{(s)} l_s^{(\mu)} x_s$, $\mu = 1, 2 \ldots$, und ein orthogonales System von orthogonalen Differentialformen $dP^{(\nu)}(x) = \sum_{(s)} d\varrho_s^{(\nu)} x_s$, $\nu = 1, 2 \ldots$, sind auch noch zueinander orthogonal, wenn für jedes μ, ν und jedes Δ gilt:

(1) $$\sum_{(s)} l_s^{(\mu)} \Delta\varrho_s^{(\nu)} = 0 .$$

Ein solches System heiße ein orthogonales Doppelsystem. Es besteht die verallgemeinerte „Besselsche Ungleichung“

(2) $$\sum_{(\mu)} (L^{(\mu)}(x))^2 + \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{(dP^{(\nu)}(x))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} \leqq \sum_{(s)} x_s^2 .$$

Falls hier das Gleichheitszeichen gilt, so heißt das orthogonale Doppelsystem vollständig:

$$(3) \qquad \sum_{(\mu)} (L^{(\mu)}(x))^2 + \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{(dP^{(\nu)}(x))^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \sum_{(s)} x_s^2 ,$$

$$(3') \quad \text{bzw.} \qquad \sum_{(\mu)} l_s^{(\mu)} l_t^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d\varrho_s^{(\nu)}\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \delta_{st} .$$

Durch ein vollständiges orthogonales Doppelsystem läßt sich jede beliebige beschränkte Linearform $M(x) = \sum_{(s)} m_s x_s$ linear darstellen:

$$(4) \qquad M(x) = \sum_{(\mu)} (L^{(\mu)} M)\, L^{(\mu)}(x) + \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d(P^{(\nu)} M)\, dP^{(\nu)}(x)}{d\varrho_s^{(\nu)}} ,$$

$$(4') \quad \text{bzw.} \qquad m_s = \sum_{(\mu)} l_s^{(\mu)} \sum_{(t)} l_t^{(\mu)} m_t + \sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{d\varrho_s^{(\nu)}\, d(\sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} m_t)}{d\varrho_0^{(\nu)}} .$$

Für ein orthogonales Doppelsystem (Vollständigkeit wird hier nicht verlangt) gilt als Verallgemeinerung der Fl. (6), S. 41,

$$(5) \qquad \sum_{(t)} \left(\sum_{(\mu)} l_t^{(\mu)} x_\mu + \sum_{(\nu)} \int_a^b u_\nu \frac{d\varrho_t^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} \right)^2 = \sum_{(\mu)} x_\mu^2 + \sum_{(\nu)} \int_a^b u^2 \frac{(df^{(\nu)})^2}{d\varrho_0^{(\nu)}} ,$$

wenn die rechte Seite existiert.

Die Abschätzungen wird man zweckmäßig mit Hilfe einer gemischten Ungleichung ausführen, deren allgemeinste Form ist:

$$(6) \qquad \begin{cases} \left(\sum_{(\mu)} q^{(\mu)} q_1^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_a^b u^{(\nu)} u_1^{(\nu)} \frac{df^{(\nu)} df_1^{(\nu)}}{dg^{(\nu)}} \right)^2 \\ \leqq \left(\sum_{(\mu)} (q^{(\mu)})^2 + \sum_{(\nu)} \int_a^b (u^{(\nu)})^2 \frac{(df^{(\nu)})^2}{dg^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{(\mu)} (q_1^{(\mu)})^2 + \sum_{(\nu)} \int_a^b (u_1^{(\nu)})^2 \frac{(df_1^{(\nu)})^2}{dg^{(\nu)}} \right) . \end{cases}$$

Konvergenz der Summen auf der rechten Seite ist vorausgesetzt.

Eine nicht identisch verschwindende beschränkte quadratische Form hat nach dem Existenzsatz des Spektrums[1]) mindestens eine eigentliche Eigenform oder eine Eigendifferentialform. Die Gesamtheit aller Eigenformen (mit den uneigentlichen) und aller Eigendifferentialformen einer quadratischen Form bildet ein vollständiges orthogonales Doppelsystem. Jede Linearform läßt sich nach ihnen entwickeln.

Ebenso hat jeder Kern $k(s)_t$ (mit nicht verschwindender Gitterform) mindestens eine eigentliche Eigenfunktion oder eine Eigendifferentialfunktion. Die Gesamtheit aller Eigenfunktionen und Eigendifferentialfunktionen bildet in ihren Staffelwerten das Koeffizientenschema eines vollständigen orthogonalen Doppelsystems:

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} \psi_s^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{(s)} \psi_s^{(\mu)} \Delta\varrho_s^{(\nu)} = 0 & \text{Orthogonalität,} \\ \sum_{(s)} \Delta_1 \varrho_s^{(\mu)}\, \Delta_2 \varrho_s^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \Delta_{12} \varrho_0^{(\nu)}, & \mu = \nu \end{cases} \end{cases}$$

$$(8) \qquad \sum_{(\nu)} \psi_s^{(\mu)} \psi_t^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho_s^{(\nu)}\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}} = \delta_{st} \qquad \text{Vollständigkeit.}$$

Auf diesen Grundlagen erhält man durch Superposition der früheren Formeln die folgenden Sätze.

[1]) Vgl. Hlg. S. 259.

§ 2. Resultate.

Satz 1. *Die Kernentwicklung.* Jeder Kern läßt sich nach seinen Eigenfunktionen und Eigendifferentialfunktionen in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln:

$$(9) \qquad k(s)_t = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu \psi^{(\mu)}(s)\, \psi_t^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho_t^{(\nu)}}{d\varrho_0^{(\nu)}}.$$

Satz 2. *Die Entwicklung der iterierten Kerne.* Der n-fach iterierte Kern läßt sich nach den Eigenfunktionen und Eigendifferentialfunktionen des ursprünglichen Kernes in eine absolut und in beiden Argumenten gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln:

$$(10) \quad k^{(n)}(s,t) = \sum_{(\mu)} \lambda_\mu^n \psi^{(\mu)}(s)\, \psi^{(\mu)}(t) + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \lambda^n \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\varrho^{(\nu)}(t)}{d\varrho_0^{(\nu)}}, \quad n > 1.$$

Satz 3. *Die Entwicklung willkürlicher Funktionen.* Eine jede Funktion, die sich als Kernsumme darstellen läßt, kann nach Eigenfunktionen und Eigendifferentialfunktionen des Kernes in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickelt werden:

$$(11) \qquad f(s) = \sum_{(\mu)} \gamma_\mu \psi^{(\mu)}(s) + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, d\delta_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}},$$

wo $\gamma_\mu = \sum_{(t)} \psi_t^{(\mu)} f_t$, $\quad \delta_\nu = \sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} f_t$ ist.

Die Glieder mit den uneigentlichen Eigenfunktionen fallen aus dieser Darstellung heraus.

Satz 4. *Die inhomogene Summengleichung.* Die inhomogene Summengleichung

$$(12) \qquad \varphi(s) - \frac{1}{\lambda_0} \sum_{(t)} k(s)_t \varphi_t = f(s)$$

hat dann und nur dann für beliebiges $f(s)$ die eindeutige Lösung

$$(13) \quad \varphi(s) = f(s) + \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_\mu a_\mu}{\lambda_0 - \lambda_\mu} \psi^{(\mu)}(s) + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho^{(\nu)}(s)\, da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}},$$

wo $a_\mu = \sum_{(t)} \psi_t^{(\mu)} f_t$, $\quad a_\nu = \sum_{(t)} \varrho_t^{(\nu)} f_t$ ist, wenn λ_0 nicht zum vollständigen Spektrum des Kernes $k(s)_t$ gehört, d. h. kein Eigenwert, keine Häufungsstelle dieser und keine Stelle des Streckenspektrums ist.

Die Darstellung (13) der Lösung läßt ihren funktionentheoretischen Charakter als Funktion von λ_0 erkennen. Die Eigenwerte $\lambda\mu$ sind ihre Pole, die Häufungsstellen und das Streckenspektrum bilden die Gesamtheit der wesentlich singulären Stellen. Außerhalb des Intervalles $(-M, M)$ der reellen Achse ist die Funktion überall regulär.

Es bestätigt sich auch das Resultat, das man durch Entwicklung der Lösung in die Neumannsche Reihe erhält, daß nämlich stets eine eindeutige Lösung existiert, falls $|\lambda_0| > M$ ist (vgl. S. 43).

In der Theorie der Integralgleichungen besteht die Alternative: Entweder hat die homogene Gleichung eine Lösung (für die Eigenwerte), oder (in den anderen Fällen) die inhomogene Gleichung eine eindeutige Lösung. Dieses gilt hier nur für Kerne mit vollstetigen Gitterformen. Im allgemeinen tritt noch die, der Theorie der quadratischen Formen typische, dritte Möglichkeit hinzu, daß für die Häufungsstellen der Eigenwerte und die Stellen des Streckenspektrums weder die homogene, noch die inhomogene Gleichung (für beliebiges $f(s)$) eine Lösung hat.

Folgerung. Das Gitterproblem der inhomogenen Summengleichung ist die Auflösung der unendlich vielen linearen Gleichungen

$$\varphi_s - \frac{1}{\lambda_0} \sum_{(t)} k_{st} \varphi_t = f_s, \qquad s = 1, 2 \ldots, \tag{14}$$

mit unendlich vielen Unbekannten. k_{st} und f_s sind beschränkt gegeben, φ_s wird beschränkt gesucht.

Für jedes λ_0, das nicht zum Spektrum der quadratischen Form $K(x,x) = \sum_{(s)} \sum_{(t)} k_{st} x_s x$ gehört, ist nach (13) die eindeutige Lösung:

$$\varphi_s = f_s + \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_\mu a_\mu}{\lambda_0 - \lambda_\mu} \psi_s^{(\mu)} + \sum_{(\nu)} \int_{-M}^{M} \frac{\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \frac{d\varrho_s^{(\nu)} da_\nu}{d\varrho_0^{(\nu)}}. \tag{15}$$

Da der Beweis von der Existenz der Lösung ausgeht, ist gezeigt, daß es keine andere beschränkte Lösung als obige, in den f_s lineare geben kann, was häufig nach Analogie mit endlichen Gleichungssystemen von vornherein vorausgesetzt wird.

Hilbert[1]) gibt die Lösung dieses Problems mit Hilfe einer „lösenden Form". Auch für die Summengleichung kann man entsprechend einen „lösenden Kern" definieren und mit seiner Hilfe die Lösung von (12) in einer anderen Form finden (vgl. S. 43). Das Resultat ist dasselbe.

Die ganze Sachlage und die Natur der Untersuchung machen es wahrscheinlich, daß der Weg zur Lösung des Problems erhalten bleibt, auch wenn man die wichtige Voraussetzung der Beschränktheit oder der Symmetrie der Gitterform des Kernes fallen läßt. Zuerst wird man das betreffende Gitterproblem zu lösen haben, d. h. die Eigenschaften der zugrunde gelegten allgemeineren Gitterform untersuchen müssen, und dann wird sich auf dieses die Lösung der Summengleichung zurückführen lassen.

---

[1]) Hilbert, „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Teubner 1912, S. VIII.

On oblique Trajectories of a Family of Curves on a Surface.

By *C. E. Weatherburn*, M. A., D. Sc. in Christchurch (New Zealand).

1. Introduction. Notation.

Let φ be a point-function for a given surface S, and $\varphi = \text{const.}$ a singly infinite family of curves on the surface. Consider also another family of curves, cutting the former at a variable angle θ. We propose to examine the fundamental properties of this family of trajectories, expressing the results in terms of the functions φ, θ and their two-parametric differential invariants [1]) on the surface S.

The *distance function* ψ for the family $\varphi = \text{const.}$ we define as the reciprocal of the magnitude of $\nabla\varphi$, which is the vector gradient of φ on the surface. Thus

$$\psi^2 = 1/(\nabla\varphi)^2 \tag{1}$$

and from the definition [2]) of $\nabla\varphi$ it then follows that the distance in the direction of this vector between adjacent curves φ and $\varphi + d\varphi$ has the value $\psi d\varphi$. Hence the name „distance function". The unit vector b tangential to the surface, and perpendicular to the curve $\varphi = \text{const.}$ in the direction of φ increasing, is

$$b = \psi\nabla\varphi \tag{2}$$

If n is the unit vector normal to the surface, the unit tangent a to the curve $\varphi = \text{const.}$ is given by

$$a = b \times n = \psi\nabla\varphi \times n \tag{3}$$

a, b, n forming a right-handed system of vectors. We take the direction of a as the positive direction along this curve. The *unit tangent* t to the oblique trajectory is then given by

$$t = a\cos\theta + b\sin\theta \tag{4}$$

and the unit vector m, perpendicular to t and tangential to the surface, by

$$m = b\cos\theta - a\sin\theta \tag{5}$$

so that t, m, n form a right-handed system of vectors. The direction of t is taken as the positive direction along the curve.

2. Divergence. Line of Striction. Parallels.

The *divergence* of the family of oblique trajectories has the value [3]) div t, and is therefore given by

---

[1]) All the differential invariants (grad., div., rot. etc.) of this paper are the two-parametric invariants introduced and examined by the author in a recent paper „On Differential Invariants in Geometry of Surfaces, etc" *Quarterly Journal of Math.*, *Vol.* 50, *pp.* 230—269 (1925). An independent account of these is given in Chapter XII of the author's *Differential Geometry*, (Cambridge University Press, January, 1927).

[2]) *Differential Geometry*, Art. 114.

[3]) *Ibid.*, Art. 130.

$$(6) \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} t &= \operatorname{div}(a\cos\theta + b\sin\theta) \\ &= \cos\theta \operatorname{div} a + \sin\theta \operatorname{div} b + m\cdot\nabla\theta \end{aligned}$$

which may also be expressed in the form [4]).

$$(7) \qquad \operatorname{div} t = \cos\theta\,(\nabla\psi\times\nabla\varphi\cdot n) + \sin\theta\,(\psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi\cdot\nabla\varphi) + m\cdot\nabla\theta.$$

The *line of striction* [5]) of the family of trajectories is the locus of points at which the divergence is zero. It is therefore obtained by equating to zero the second member of (6) or (7). The oblique trajectories will constitute a family of *parallels* provided the divergence vanishes identically [6]).

Suppose that the curves $\varphi = \text{const.}$ are a family of parallels. Then $\operatorname{div} a = 0$; and the trajectories will also constitute a family of parallels provided

$$\sin\theta \operatorname{div} b + m\cdot\nabla\theta = 0.$$

Now $m\cdot\nabla\theta$ is the derivative of θ in the direction of m. If we denote this by $\frac{d\theta}{dm}$ we may write the last equation

$$\frac{d}{dm}\log\tan\frac{\theta}{2} + \operatorname{div} b = 0.$$

Therefore, since $-\operatorname{div} b$ is the geodesic curvature [7]) of the curve $\varphi = \text{const.}$, we have the theorem:

A family of curves cutting a family of parallels at a variable angle θ will themselves be parallels provided $\frac{d}{dm}\log\tan\frac{\theta}{2}$ is equal to the geodesic curvature of the family of parallels.

Similarly, if the curves $\varphi = \text{const.}$ are geodesics [8]), $\operatorname{div} b = 0$; and the trajectories will be a family of parallels provided

$$(8) \qquad \cos\theta \operatorname{div} a + m\cdot\nabla\theta = 0$$

that is to say

$$\frac{d}{dm}\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{div} a = 0.$$

Hence the theorem:

A family of curves cutting a family of geodesics at a variable angle θ will constitute a family of parallels provided $\frac{d}{dm}\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ is the negative of the divergence of the family of geodesics.

If $\theta = \pi/2$ it follows from (8) that the trajectories are a family of parallels.

3. Geodesic curvature. Line of normal curvature.

The *geodesic curvature* $\varkappa_g$ of the trajectory through the point is given by

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varkappa_g &= -\operatorname{div} m = \operatorname{div}(a\sin\theta - b\cos\theta) \\ &= \sin\theta \operatorname{div} a - \cos\theta \operatorname{div} b + t\cdot\nabla\theta \end{aligned}$$

which may also be expressed

---

[4]) See also a paper by the author „On Families of Curves on a Surface", recently communicated to the *Tôhoku Mathematical Journal.*

[5]) *Differential Geometry*, Art. 126.

[6]) *Ibid.*, Art. 130.

[7]) *Ibid.*, Art. 121.

[8]) *Diff. Geom.*, Arts. 121 and 130.

$$(10)\quad \varkappa_g = (\nabla\psi \times \nabla\varphi \cdot n)\sin\theta - (\psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\cos\theta + t\cdot\nabla\theta.$$

Since $-\operatorname{div} b$ is the geodesic curvature of the curve $\varphi = \text{const.}$, and $\operatorname{div} a$ is that of its orthogonal trajectory, the equation (9) agrees with *Liouville*'s formula [9]) for the geodesic curvature of a curve in terms of those of the orthogonal parametric curves. The *line of normal curvature* [10]) of the family of trajectories is the locus of points at which $\varkappa_g$ is zero. It is therefore obtained by equating to zero the second member of (9) or (10). The trajectories will constitute a *family of geodesics* if $\varkappa_g$ vanishes identically.

Suppose that the curves $\varphi = \text{const.}$ are a family of geodesics. Then $\operatorname{div} b = 0$; and the trajectories will also be a family of geodesics provided

$$(11)\qquad \sin\theta \operatorname{div} a + t\cdot\nabla\theta = 0.$$

If $\frac{d}{ds}$ denotes differentiation in the direction of the trajectory we may write this

$$\frac{d}{ds}\log\tan\frac{\theta}{2} + \operatorname{div} a = 0.$$

Hence the theorem:

A family of curves cutting a family of geodesics at a variable angle θ will themselves be geodesics provided $\frac{d}{ds}\log\tan\frac{\theta}{2}$ is the negative of the divergence of the family of geodesics.

Suppose that both families are thus geodesics. The line of striction of $\varphi = \text{const.}$ is given by $\operatorname{div} a = 0$, and therefore, in virtue of (11), by $\frac{d\theta}{ds} = 0$. Consequently, since either family may be chosen for reference, we have the theorem:

If two families of geodesics cut at a variable angle θ, the line of striction of either is given by the vanishing of the derivative of θ in the direction of the other.

Next suppose that the curves $\varphi = \text{const.}$ are parallels. Then $\operatorname{div} a = 0$. The trajectories will therefore be geodesics provided

$$(12)\qquad t\cdot\nabla\theta - \cos\theta \operatorname{div} b = 0$$

which may be written

$$\frac{d}{ds}\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{div} b.$$

Hence the theorem:

A family of curves cutting a family of parallels at a variable angle θ will constitute a family of geodesics provided $\frac{d}{ds}\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ is the negative of the geodesic curvature of the family of parallels.

If $\theta = \pi/2$ it follows from (12) that the trajectories are geodesics.

Lastly suppose that the curves $\varphi = \text{const.}$ are parallels, and also the family of trajectories. Then $\operatorname{div} a = 0$ and $\operatorname{div} t = 0$, and we have in virtue of (6)

$$\sin\theta \operatorname{div} b + m\cdot\nabla\theta = 0.$$

Now $\operatorname{div} b$ vanishes on the line of normal curvature of the family $\varphi = \text{const.}$ Hence, since either family of parallels may be chosen for reference, we have the theorem:

If two families of parallels cut at a variable angle θ, the line of normal curvature of either is given by the vanishing of the derivative of θ in the direction perpendicular to the other.

---

[9]) *Ibid.*, p. 111.

[10]) *Diff. Geom.*, Art. 130.

Since the orthogonal trajectories of a family of parallels constitute a family of geodesics [11]), and vice versa, two of the above theorems may be deduced from the corresponding theorems of Art. 2.

4. Moment of Family. Lines of Curvature.

The moment [12]), M, of the family of trajectories is equal to the torsion of the geodesic tangent. It has the value $t \cdot \mathrm{rot}\, t$, and is therefore given by

$$\begin{aligned} M &= (a\cos\theta + b\sin\theta)\cdot \mathrm{rot}\,(a\cos\theta + b\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta\, a\cdot\mathrm{rot}\, a + \sin^2\theta\, b\cdot\mathrm{rot}\, b + \sin\theta\cos\theta\,(a\cdot\mathrm{rot}\, b + b\cdot\mathrm{rot}\, a). \end{aligned}$$

Now $a\cdot\mathrm{rot}\, a$ is the moment of the family $\varphi = \text{const.}$, or the torsion of its geodesic tangent, and is therefore also equal to $-b\cdot\mathrm{rot}\, b$. Denoting this by τ we have

$$\tau = -\psi\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,(\psi\nabla\varphi) = -\psi^2\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,\nabla\varphi \tag{13}$$

Also $-b\cdot\mathrm{rot}\, a$ is the normal curvature $\varkappa_1$ of the surface [13]) in the direction of a, and $a\cdot\mathrm{rot}\, b$ is the normal curvature $\varkappa_2$ in the direction of b. These have the values

$$\varkappa_1 = -\psi\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,(\psi\nabla\varphi\times n) = J + \psi^2\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi \tag{14}$$

where J is the first curvature (or mean curvature) of the surface, with the value $\varkappa_1+\varkappa_2$, or $-\mathrm{div}\, n$; and similarly

$$\varkappa_2 = \psi(\nabla\varphi\times n)\cdot\mathrm{rot}\,(\psi\nabla\varphi) = -\psi^2\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi. \tag{15}$$

Thus the moment of the familiy of trajectories is given by

$$\begin{aligned} M &= \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\varkappa_2-\varkappa_1)\sin\theta\cos\theta \\ &= \tau\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(J - 2\varkappa_1)\sin 2\theta \\ &= -\psi^2\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi)\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}(2\psi^2\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi + J)\sin 2\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

The *line of zero moment* of the family of trajectories is the locus of points at which M is zero. It is therefore obtained by equating to zero the second member of (16). The moment vanishes identically if the trajectories are *lines of curvature.* Hence:

The angle θ, measured in the positive sense, from the direction of the curve $\varphi = \text{const.}$ to a principal direction on the surface is given by

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{2\varkappa_1 - J} = \frac{-2\psi^2\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi)}{2\psi^2\,\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi + J}. \tag{17}$$

In the above, in place of the expression $\nabla\varphi\cdot\nabla n$ or $\nabla n\cdot\nabla\varphi$. we could write equally well $(\mathrm{rot}\,\nabla\varphi)\times n$.

5. Normal Curvature. Asymptotic Lines.

The *normal curvature*, $\varkappa_n$, of the surface in the direction of the trajectory has the value $-m\cdot\mathrm{rot}\, t$. Thus

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= (a\sin\theta - b\cos\theta)\cdot\mathrm{rot}\,(a\cos\theta + b\sin\theta) \\ &= \varkappa_1\cos^2\theta + \varkappa_2\sin^2\theta + 2\tau\sin\theta\cos\theta \\ &= \cos^2\theta\,(J + \psi^2\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi) - \sin^2\theta\,(\psi^2\nabla\varphi\cdot\nabla n\cdot\nabla\varphi) \\ &\qquad - \sin 2\theta\,\psi^2\nabla\varphi\cdot\mathrm{rot}\,\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{18}$$

The *line of tangential curvature* [14]) of the family of trajectories is the locus of points at which $\varkappa_n$ is zero. It is therefore obtained by equating to zero the second member

---

[11]) *Ibid.*, p. 259.
[12]) *Diff. Geom.*, p. 258.
[13]) *Ibid.*, Art. 126.
[14]) *Ibid.*, Art. 130.

of (18). The trajectories will be *asymptotic lines* if $\varkappa_n$ vanishes identically. Hence the theorem:

The angle θ, measured in the positive sense, from the direction of the curve $\varphi = const.$ to an asymptotic direction on the surface is given by

$$\varkappa_2 \tan^2\theta + 2\tau \tan\theta + \varkappa_1 = 0, \tag{19}$$

so that

$$\tan\theta = (-\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \varkappa_1\varkappa_2})/\varkappa_2.$$

The values of τ, $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ may be inserted from (13), (14) and (15).

6. Conjugate System. Isometric System.

We have shown elsewhere [15]) that, if a is the unit tangent to a family of curves, the component of rot a tangential to the surface gives both the direction conjugate to that of a, and the arc-rate of rotation of the tangent plane as the point of contact moves along the curve. Thus the direction of the oblique trajectory will be conjugate to that of the curve $\varphi = \text{const.}$ provided

$$\tan\theta = \frac{b \cdot \text{rot}\, a}{a \cdot \text{rot}\, a} = -\frac{\varkappa_1}{\tau}.$$

This may also be stated in the form:

The family of curves conjugate to the family $\varphi = \text{const.}$ cuts the latter at a variable angle θ given by

$$\tan\theta = \frac{J + \psi^2 \nabla\varphi \cdot \nabla n \cdot \nabla\varphi}{\psi^2 \nabla\varphi \cdot \text{rot}\, \nabla\varphi} = \frac{J(\nabla\varphi)^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla n \cdot \nabla\varphi}{\nabla\varphi \cdot \text{rot}\, \nabla\varphi}. \tag{20}$$

The arc-rate of rotation of the tangent plane as the point of contact moves along the curve $\varphi = \text{const.}$ is $\sqrt{\tau^2 + \varkappa_1^2}$, which is the screw curvature [16]) of the geodesic tangent at the point of contact.

If the oblique trajectories are not conjugate to the family $\varphi = \text{const.}$ we have in the same way, in terms of the moment and normal curvature given by (16) and (18):

The angle, measured in the positive sense, from the direction of the trajectory to the conjugate direction is equal to $\tan^{-1}(-\varkappa_n/M)$; and the arc-rate of rotation of the tangent plane along the trajectory is $\sqrt{M^2 + \varkappa_n^2}$.

Both the quantities specified in this theorem are given by the component of rot t tangential to the surface. Now

$$\text{rot}\, t = \cos\theta\, \text{rot}\, a + \sin\theta\, \text{rot}\, b - m \times \nabla\theta. \tag{21}$$

Inserting the values of rot a and rot b we have the result:

The vector $\psi(\text{rot}\, \nabla\varphi)\sin\theta - \psi(J\nabla\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla n)\cos\theta$ has the direction conjugate to that of the trajectory, and magnitude equal to the arc-rate of rotation of the tangent plane along the trajectory.

The family of oblique trajectories will form with their orthogonal trajectories an *isometric system* of curves on the surface provided the tangential component of the vector curvature of this orthogonal system is the gradient of some scalar function [17]). This condition may be expressed in the alternative forms

---

[15]) *Tôhoku Mathematical Journal,* loc. cit. and *Diff. Geom.*, p. 258.

[16]) *Diff. Geom.*, p. 17.

[17]) See a paper by the author „On Isometric Systems of Curves and Surfaces", *American Journal of Math.*, Vol. 49, pp. 527—534.

$$\text{div}\,(t\,\text{div}\,m - m\,\text{div}\,t) = 0 \tag{22}$$

or

$$n \cdot \text{rot}\,(t\,\text{div}\,t + m\,\text{div}\,m) = 0 \tag{23}$$

or

$$n \cdot \text{rot}\,(t\,\text{div}\,t + t \times \text{rot}\,t) = 0\ ^{18}). \tag{24}$$

The values of t and m in terms of φ and θ may be substituted, and the above condition expressed in term of differential invariants of these functions.

In particular, it is known that the family to curves $\varphi = \text{const.}$ will form with their orthogonal trajectories an isometric system provided $\nabla^2\varphi/(\nabla\varphi)^2$ is a function of φ only, that is to say, provided

$$n \cdot \nabla\varphi \times \nabla(\psi^2\nabla^2\varphi) = 0. \tag{25}$$

And, if this condition is satisfied, the oblique trajectories will form with their orthogonal curves an isometric system provided θ satisfies the differential equation [19])

$$\nabla^2\theta = 0. \tag{26}$$

---

[18]) *Tôhoku Math. Journal, loc. cit., Art.* 2 (13).

[19]) *Amer. Journal of Math.*, loc. cit., Art. 2.